6.132 - Algebraische Topologie
WS 2016/17
Hausaufgabe 2

Martin Frankland

Fällig am 29.11.2016

Definition. Sei X ein Raum. Die Relation „es gibt einen Weg von x nach y" definiert eine Äquivalenzrelation auf X, deren Äquivalenzklassen **Wegkomponenten** heißen. Man bezeichnet mit $\pi_0(X)$ die Menge der Wegkomponenten von X.

Aufgabe 1. Es sei $f\colon X \to Y$ eine (stetige) Abbildung zwischen Räumen. Man definiert eine induzierte Funktion

$$f_*\colon \pi_0(X) \to \pi_0(Y),$$

manchmal auch mit $\pi_0(f)$ bezeichnet, durch die Formel $f_*[x] := [f(x)]$, wo $[x]$ die Wegkomponente von $x \in X$ bezeichnet.

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion f_* wohldefiniert ist.

(b) Zeigen Sie, dass f_* verträglich ist mit Komposition und Identitäten. Anders gesagt gilt die Gleichung

$$(gf)_* = g_* f_*$$

für alle Abbildungen $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$, sowie

$$(\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{\pi_0(X)}$$

für alle Räume X.

(c) Zeigen Sie, dass π_0 *homotopieinvariant* ist im folgenden Sinne: homotopische Abbildungen $f \simeq g\colon X \to Y$ induzieren dieselbe Funktion

$$f_* = g_*\colon \pi_0(X) \to \pi_0(Y).$$

(d) Es seien homotopieäquivalente Räume $X \simeq Y$. Zeigen Sie, dass die Mengen $\pi_0(X)$ und $\pi_0(Y)$ in Bijektion zueinander stehen.

Aufgabe 2. Eine Abbildung heißt **nullhomotop**, wenn sie homotop zu einer konstanten Abbildung ist.

Zeigen Sie, dass die folgenden Eigenschaften eines (nichtleeren) Raumes X äquivalent sind.

1. X ist zusammenziehbar: $X \simeq *$.
2. Die Identität $\mathrm{id}_X \colon X \to X$ ist nullhomotop.
3. Für alle Räume Y, sind alle Abbildungen $X \to Y$ nullhomotop.
4. Für alle Räume W, sind alle Abbildungen $W \to X$ nullhomotop.
5. Für alle Räume W, sind alle Abbildungen $W \to X$ homotop zueinander: $[W, X] = *$.

Aufgabe 3. Sei $f \colon X \to Y$ eine Homotopieäquivalenz. Zeigen Sie, dass der induzierte Homomorphismus

$$f_* \colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$$

ein Isomorphismus ist, für jeden Basispunkt $x_0 \in X$.

Aufgabe 4. Es seien X und Y Räume, und $\gamma \colon I \to X \times Y$ ein Weg von (x_0, y_0) nach (x_1, y_1). Finden Sie eine Weghomotopie der Form

$$\gamma \simeq \alpha \bullet \beta \quad \text{rel } \{0, 1\},$$

wo α ein Weg in $X \times \{y_0\}$ von (x_0, y_0) nach (x_1, y_0) ist, und β ein Weg in $\{x_1\} \times Y$ von (x_1, y_0) nach (x_1, y_1).

(Anschaulich gesagt läuft α waagerecht und β senkrecht in das Produkt $X \times Y$.)