6.132 - Algebraische Topologie
WS 2016/17
Hausaufgabe 4

Martin Frankland

Fällig am 12.1.2017

Aufgabe 1. Es sei $L \subset \mathbb{R}^3$ eine Vereinigung von n Ursprungsgeraden, und $X = \mathbb{R}^3 \setminus L$ das Komplement. Berechnen Sie die Fundamentalgruppe $\pi_1(X)$.

Aufgabe 2. (Der reelle projektive Raum) Für jedes $n \geq 0$, zeigen Sie, dass die folgenden Räume homöomorph zueinander sind.

1. $\mathbb{R}P^n := (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/x \sim \lambda x$ für jeden von Null verschiedenen Skalar $\lambda \in \mathbb{R}^\times$.
2. $S^n/x \sim -x$, das heißt, die n-Sphäre modulo der antipodischen Wirkung.
3. $D^n/x \sim -x$ für jeden Randpunkt $x \in \partial D^n = S^{n-1}$.
4. Der CW-Komplex mit einer 0-Zelle, einer 1-Zelle, ..., und einer n-Zelle, wo die n-Zelle angeheftet wird entlang der Quotientenabbildung $\varphi \colon S^{n-1} \to \mathbb{R}P^{n-1}$, die die antipodische Wirkung herausteilt, wie in der Beschreibung (2). (Notiz: Diese Beschreibung benutzt die Aussage induktiv.)

Aufgabe 3. Es sei X ein CW-Komplex mit Skeletten $X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \ldots \subseteq X$.

(a) Zeigen Sie, dass die Inklusion des 0-Skeletts $X_0 \hookrightarrow X$ eine Surjektion $\pi_0(X_0) \twoheadrightarrow \pi_0(X)$ auf den Wegkomponenten induziert.

(b) Zeigen Sie, dass die Inklusion des n-Skeletts $X_n \hookrightarrow X$ für jedes $n \geq 1$ eine Bijektion $\pi_0(X_n) \xrightarrow{\cong} \pi_0(X)$ auf den Wegkomponenten induziert.