6.132 - Algebraische Topologie
WS 2016/17
Hausaufgabe 5

Martin Frankland

Fällig am 26.1.2017

Aufgabe 1. Es sei M_g die orientierbare Fläche vom Geschlecht $g \geq 0$ und $B \subset M_g$ ein kleiner offener Ball. Das Komplement $X := M_g \setminus B$ hat einen Rand $\partial X \cong S^1$. Zeigen Sie, dass der Rand ∂X *kein* Retrakt von X ist.

Aufgabe 2. Es sei $p \colon \widetilde{X} \to X$ eine Überlagerung.

(a) Zeigen Sie, dass p eine offene Abbilding ist, d.h., für jede offene Teilmenge $U \subseteq \widetilde{X}$ ist $p(U) \subseteq X$ offen.

(b) Falls X wegzusammenhängend ist (und $\widetilde{X}$ nichtleer), zeigen Sie, dass p eine Quotientenabbildung ist.

In Vorbereitung auf die nächsten Aufgaben legen wir Terminologie fest.

Mit einer Wirkung einer Gruppe G auf einem Raum X wird immer eine *stetige* Wirkung gemeint, d.h., die Wirkung $G \times X \to X$ ist eine stetige Abbildung. Falls G diskret ist, ist eine G-Wirkung genau dann stetig, wenn für jedes $g \in G$ die Abbildung $g(-)\colon X \to X$ stetig ist (und deshalb ein Homöomorphismus).

Eine Gruppenwirkung von G auf X heißt *frei*, wenn alle Stabilisatoren trivial sind, d.h., für jedes $x \in X$ gilt $\mathrm{Stab}(x) = \{1\}$. Mit anderen Worten: Die Gleichung $gx = x$ impliziert $g = 1$.

Definition. Eine Wirkung einer diskreten Gruppe G auf einem Raum X heißt **eigentlich diskontinuierlich**, wenn es zu jedem $x \in X$ eine Umgebung U von x gibt, für die die Menge

$$\{g \in G \mid U \cap gU \neq \emptyset\}$$

endlich ist.

Aufgabe 3. Es sei G eine diskrete Gruppe, die auf einem Raum X wirkt.

(a) Es sei X hausdorffsch und die G-Wirkung auf X frei und eigentlich diskontinuierlich. Zeigen Sie, dass die G-Wirkung die folgende Bedingung erfüllt:

Zu jedem $x \in X$ gibt es eine Umgebung U von x, für die

$$\{g \in G \mid U \cap gU \neq \emptyset\} = \{1\} \qquad (\star)$$

gilt. Mit anderen Worten: Die Bedingung $U \cap gU \neq \emptyset$ impliziert $g = 1$.

(b) Falls die G-Wirkung auf X die Bedingung $(\star)$ erfüllt, zeigen Sie, dass die Quotientenabbildung $\pi\colon X \to X/G$ eine Überlagerung ist. Hier bezeichnet X/G den Bahnenraum der Wirkung, mit der Quotiententopologie versehen.

Aufgabe 4. Man bezeichnet $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und betrachtet die Wirkung der Gruppe $G = \mathbb{Z}$ auf X, die vom Homöomorphismus $T\colon X \to X$ erzeugt wird, mit

$$T(x, y) = (2x, \frac{y}{2}).$$

(a) Zeigen Sie, dass diese G-Wirkung auf X die Bedingung $(\star)$ erfüllt. Mit anderen Worten: Jeder Punkt $x \in X$ hat eine Umgebung U sodass die Bedingung $U \cap gU \neq \emptyset$ die Gleichung $g = 0 \in \mathbb{Z}$ impliziert.

(b) Zeigen Sie, dass der Bahnenraum X/G *nicht* hausdorffsch ist.