6.132 - Algebraische Topologie
WS 2016/17
Hausaufgabe 6

Martin Frankland

Fällig am 7.2.2017

Aufgabe 1. Sei X der in der Grafik 1 dargestellte eindimensionale Simplizialkomplex. Genauer gesagt enthält X vier 0-Simplizes und fünf 1-Simplizes.

Bestimmen Sie den simplizialen Kettenkomplex $C_*^{\Delta}(X)$ sowie dessen Homologie $H_*^{\Delta}(X)$.

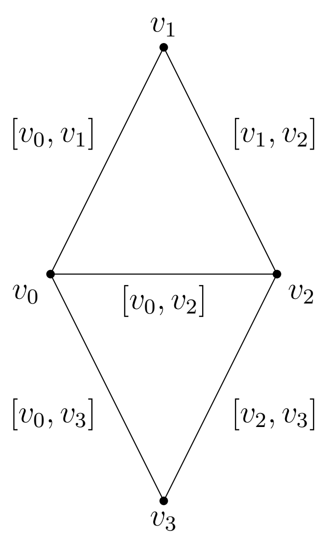

Abbildung 1: Der Simplizialkomplex X.

Aufgabe 2. Seien C_* und D_* die Kettenkomplexe, die als Spalten dieses Diagramms dargestellt werden:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \arrow[r, "3"] \arrow[d, swap, "\begin{bmatrix} 6 \\ -6 \end{bmatrix}"] & \mathbb{Z} \arrow[d, "4"] & \text{Grad } 2 \\
\mathbb{Z}^2 \arrow[r, "\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}"] \arrow[d, swap, "\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}"] & \mathbb{Z} \arrow[d, "q"] & \text{Grad } 1 \\
\mathbb{Z} \arrow[r, two heads, "q"] & \mathbb{Z}/2 & \text{Grad } 0.
\end{tikzcd}
$$

Hier bezeichnet $q\colon \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/2$ die Quotientenabbildung, die die Untergruppe $2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ herausteilt.

Waagerecht stellt das Diagramm einen Morphismus $\varphi\colon C_* \to D_*$ von graduierten abelschen Gruppen dar.

(a) Finden Sie alle Werte für $a, b \in \mathbb{Z}$, sodass $\varphi\colon C_* \to D_*$ zum Kettenhomomorphismus wird.

(b) Falls $\varphi\colon C_* \to D_*$ ein Kettenhomomorphismus ist, wie in der Teilaufgabe (a), berechnen Sie den von φ auf Homologie induzierten Homomorphismus

$$H_n(\varphi)\colon H_n(C_*) \to H_n(D_*)$$

in jedem Grad $n \geq 0$.

Hinweis: Von vornherein könnte die Antwort von $a, b \in \mathbb{Z}$ abhängen. In diesem Beispiel stellt sich allerdings heraus, dass die Antwort von a und b nicht abhängt.

Aufgabe 3. Sei X ein Raum. Zeigen Sie, dass es einen Isomorphismus

$$H_0(X) \cong \mathbb{Z}\pi_0(X)$$

gibt. Das heißt, die 0-te singuläre Homologie von X ist isomorph zur freien abelschen Gruppe auf der Menge $\pi_0(X)$ der Wegkomponenten von X.

Bemerkung. Insbesondere gilt $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$ falls X wegzusammenhängend ist.