6.132 - Algebraische Topologie
WS 2016/17
Die Homotopiehochhebungseigenschaft

Martin Frankland

24.11.2016

Definition 1. Sei $p\colon E \to B$ eine Abbildung zwischen Räumen.

1. Ist $f\colon X \to B$ eine Abbildung, so heißt $\widetilde{f}\colon X \to E$ eine **Hochhebung** von f entlang p, wenn die Gleichung $p\widetilde{f} = f$ gilt, wie in diesem Diagramm dargestellt:

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[ur, "\widetilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & B. \end{tikzcd}$$

2. Die Abbildung $p\colon E \to B$ erfüllt die **Hochhebungseigenschaft für Wege**, wenn zu jedem Weg $\gamma\colon I \to B$ und jedem Punkt $e_0 \in E$ mit $p(e_0) = \gamma(0)$ gibt es einen Weg $\widetilde{\gamma}\colon I \to E$ mit $p\widetilde{\gamma} = \gamma$ und $\widetilde{\gamma}(0) = e_0$, wie in diesem Diagramm dargestellt:

$$\begin{tikzcd} \{0\} \arrow[r, "e_0"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\ I \arrow[ur, dashed, "\exists\widetilde{\gamma}"] \arrow[r, "\gamma"'] & B. \end{tikzcd}$$

3. Die Abbildung $p\colon E \to B$ erfüllt die **eindeutige Hochhebungseigenschaft für Wege**, wenn zu jedem Weg $\gamma\colon I \to B$ und jedem Punkt $e_0 \in E$ mit $p(e_0) = \gamma(0)$ gibt es einen *eindeutigen* Weg $\widetilde{\gamma}\colon I \to E$ mit $p\widetilde{\gamma} = \gamma$ und $\widetilde{\gamma}(0) = e_0$, wie in diesem Diagramm

dargestellt:

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r, "e_0"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\
I \arrow[r, "\gamma"'] \arrow[ur, dashed, "\exists!\widetilde{\gamma}"] & B.
\end{tikzcd}$$

4. Die Abbildung $p\colon E \to B$ erfüllt die **Homotopiehochhebungseigenschaft** (HHE) bezüglich eines Raumes X, wenn zu jeder Homotopie $H\colon X \times I \to B$ und jeder Abbildung $\widetilde{f}\colon X \to E$ mit $p\widetilde{f} = H(-,0)$ gibt es eine Homotopie $\widetilde{H}\colon X \times I \to E$ mit $p\widetilde{H} = H$ und $\widetilde{H}(-,0) = \widetilde{f}$, wie in diesem Diagramm dargestellt:

$$\begin{tikzcd}
X \times \{0\} \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\
X \times I \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, dashed, "\exists\widetilde{H}"] & B.
\end{tikzcd}$$

Bemerkung 2. Die Gleichung $\widetilde{\gamma}(0) = e_0$ ist eine Anfangsbedingung für den hochgehobenen Weg $\widetilde{\gamma}\colon I \to E$, indem sie den Anfangspunkt von $\widetilde{\gamma}$ vorgibt. Ebenfalls ist die Gleichung $\widetilde{H}(-,0) = \widetilde{f}$ eine Anfangsbedingung für die hochgehobene Homotopie $\widetilde{H}\colon X \times I \to E$.

Bemerkung 3. Die Hochhebungseigenschaft für Wege ist die Homotopiehochhebungseigenschaft bezüglich des Raumes $X = *$.

Bemerkung 4. Wenn $p\colon E \to B$ die eindeutige Hochhebungseigenschaft für Wege erfüllt, dann gibt es höchstens eine Homotopie $\widetilde{H}\colon X \times I \to E$ im Diagramm

$$\begin{tikzcd}
X \times \{0\} \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\
X \times I \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, dashed, "\exists?\widetilde{H}"] & B.
\end{tikzcd}$$

Insbesondere gilt die folgende Implikation:

$$\left.\begin{array}{l}\text{eindeutige Hochhebungseigenschaft für Wege}\\[1ex] \text{HHE bezüglich } X\end{array}\right\} \Rightarrow \text{eindeutige HHE bezüglich } X.$$

Das Argument im Abschnitt 1.1, womit wir $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ bewiesen haben, liefert den folgenden Satz.

Satz 5. *Jede Überlagerung $p\colon E \to B$ erfüllt die eindeutige HHE bezüglich jedes Raumes X.*

Wir kommen im Abschnitt 1.3 darauf zurück.