6.132 - Algebraische Topologie
WS 2016/17
Kategorien und Funktoren

Martin Frankland

2.1.2017

Dieses Skript beschreibt einige Grundbegriffe der Kategorientheorie und Beispiele, die für algebraische Topologie nützlich sind.

Zum Teil (besonders am Anfang) folgen wir dem Skript [2, §1].

1 Kategorien

Definition 1.1. Eine **Kategorie** $\mathcal{C}$ besteht aus den folgenden Daten:

1. Eine Klasse $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, deren Elemente **Objekte** von $\mathcal{C}$ genannt werden.
2. Für jede Objekte X und Y aus $\mathcal{C}$ gibt es eine Menge $\mathcal{C}(X, Y)$, deren Elemente **Morphismen** von X nach Y genannt werden.
3. Für jede Objekte X, Y, und Z aus $\mathcal{C}$ gibt es ein Verknüpfungsgesetz
$$\mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(Y, Z) \to \mathcal{C}(X, Z).$$
Die Verknüpfung eines Paares von Morphismen (f, g) wird mit $g \circ f$ bezeichnet.
4. Für jedes Objekt X aus $\mathcal{C}$ gibt es einen Morphismus $1_X \in \mathcal{C}(X, X)$, genannt die **Identität** auf X.

Die folgenden Eigenschaften müssen gelten:

- Die Verknüpfung von Morphismen ist assoziativ, das heißt, für alle Morphismen $f \in \mathcal{C}(W, X)$, $g \in \mathcal{C}(X, Y)$, und $h \in \mathcal{C}(Y, Z)$ gilt die Gleichung
$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$
in $\mathcal{C}(W, Z)$.

- Identitätsmorphismen verhalten sich unter Verknüpfung neutral, das heißt, für alle $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ gelten die Gleichungen
$$1_Y \circ f = f = f \circ 1_X$$
in $\mathcal{C}(X,Y)$.

Bemerkung 1.2. Hier sind einige Bemerkungen zur Terminologie und Schreibweise.

1. Die Morphismenmenge $\mathcal{C}(X,Y)$ wird auch mit $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ bezeichnet.
2. Identitätsmorphismen werden auch mit id_X bezeichnet.
3. Die Verknüpfung wird auch **Verkettung** oder **Komposition** genannt. Sie wird oft ohne Symbol bezeichnet, das heißt, gf statt $g \circ f$.
4. Ein Morphismus $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ wird oft als Pfeil $f \colon X \to Y$ bezeichnet, auch manchmal **Pfeil** genannt. Das Objekt X heißt die **Quelle** von f und Y heißt das **Ziel** von f.
5. Die Verknüpfung $gf \colon X \to Z$ von Morphismen $f \colon X \to Y$ und $g \colon Y \to Z$ lässt sich in einem Diagramm darstellen:
$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z.$$
6. Ein Diagramm **kommutiert**, falls alle Verkettungen mit gleichen Endpunkten gleich sind. Zum Beispiel kommutiert dieses Diagramm genau dann, wenn $\varphi = gf$ gilt:
$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dr, "g"] & \\ X \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "\varphi"] & & Z. \end{tikzcd}$$
Dieses Diagramm kommutiert genau dann, wenn $gi = jf$ gilt:
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & B \arrow[d, "j"] \\ X \arrow[r, "g"] & Y. \end{tikzcd}$$
7. Diagramme werden als kommutativ verstanden, sofern nicht anders vermerkt. Ein nicht-kommutatives Diagramm ohne weitere Erklärung hinzuschreiben, gilt als irreführend.

Beispiel 1.3. 1. **Set** bezeichnet die Kategorie der Mengen und Funktionen $f\colon X \to Y$. Verkettung ist die übliche Verkettung von Funktionen, nämlich $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Die Identität $1_X\colon X \to X$ ist die übliche Identitätsfunktion, $1_X(x) = x$.

2. **Gp** bezeichnet die Kategorie der Gruppen und Gruppenhomomorphismen $f\colon G \to H$. Nach wie vor ist Verkettung die übliche Verkettung.

3. **Ab** bezeichnet die Kategorie der abelschen Gruppen und Gruppenhomomorphismen $f\colon A \to B$.

4. Es sei k ein Körper. $\mathbf{Vekt}_k$ bezeichnet die Kategorie der Vektorräume über k und k-linearen Abbildungen $f\colon V \to W$.

5. **Top** bezeichnet die Kategorie der topologischen Räume und stetigen Abbildungen $f\colon X \to Y$.

6. $\mathbf{Set}_*$ bezeichnet die Kategorie der punktierten Mengen und punktierten Funktionen $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$, das heißt, Funktionen $f\colon X \to Y$ mit $f(x_0) = y_0$.

7. $\mathbf{Top}_*$ bezeichnet die Kategorie der punktierten topologischen Räumen und punktierten stetigen Abbildungen $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$.

8. Ho(**Top**) bezeichnet die Homotopie-Kategorie[1] der topologischen Räume. Objekte sind topologische Räume, und Morphismen sind Homotopieklassen $[f]\colon X \to Y$ von stetigen Abbildungen.

9. Ho($\mathbf{Top}_*$) bezeichnet die Homotopie-Kategorie der punktierten topologischen Räume. Objekte sind punktierte topologische Räume, und Morphismen sind punktierte Homotopieklassen $[f]\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ von punktierten stetigen Abbildungen.

Definition 1.4. Eine Kategorie heißt **klein**, falls die Objekten eine Menge bilden.

Bemerkung 1.5. Keine der im Beispiel 1.3 beschriebenen Kategorien ist klein. Zum Beispiel ist die Kategorie **Set** nicht klein, denn es gibt keine "Menge aller Mengen", sondern eine echte Klasse Ob(**Set**) aller Mengen.

2 Isomorphismen

Definition 2.1. Ein Morphismus $f\colon X \to Y$ heißt **Isomorphismus**, falls er invertierbar ist, d.h., es gibt einen Morphismus $g\colon Y \to X$ mit $gf = 1_X$ und $fg = 1_Y$.

So ein Morphismus g heißt das **Inverse** von f und wird mit $g = f^{-1}$ bezeichnet. Dass f ein Isomorphismus ist, bezeichnet man oft mit $f\colon X \xrightarrow{\cong} Y$.

Objekte X und Y heißen **isomorph**, falls es einen Isomorphismus zwischen ihnen gibt. Dies bezeichnet man oft mit $X \cong Y$.

[1]Diese Kategorie Ho(**Top**) wird manchmal *naive* Homotopie-Kategorie genannt. In der Literatur nennt man Homotopie-Kategorie die Kategorie der CW-Komplexe und Homotopieklassen von stetigen Abbildungen.

Beispiel 2.2.

1. In **Set** sind die Isomorphismen die bijektiven Abbildungen.
2. Ebenso in **Gp**, **Ab**, $\mathbf{Vekt}_k$, und $\mathbf{Set}_*$ ist ein Morphismus $f\colon X \to Y$ genau dann ein Isomorphismus, wenn er bijektiv ist. Das Inverse $f^{-1}\colon Y \to X$ ist dann die Umkehrabbildung, die die jeweilige algebraische Struktur automatisch erhält.
3. In **Top** sind die Isomorphismen die Homöomorphismen (nach Definition). Das sind die stetigen Bijektionen $f\colon X \to Y$, deren Umkehrabbildung $f^{-1}\colon Y \to X$ auch stetig ist. *Nicht* jede stetige Bijektion ist ein Homöomorphismus.
4. In Ho(**Top**) sind die Isomorphismen die Homotopieäquivalenzen (genauer gesagt, die Homotopieklassen von Homotopieäquivalenzen). Zwei Räume X und Y sind isomorph in Ho(**Top**) genau dann, wenn sie homotopieäquivalent sind.

Aufgabe 2.3. Es sei $f\colon X \to Y$ ein Morphismus.

1. Es sei $g\colon Y \to X$ linksinvers zu f und $h\colon Y \to X$ rechtsinvers zu f, d.h., es gelten die Gleichungen $gf = 1_X$ und $fh = 1_Y$. Zeigen Sie, dass $g = h$ gilt.

   Dies zeigt insbesondere, dass das Inverse f^{-1} durch f eindeutig bestimmt wird.

2. Es seien $g, h\colon Y \to X$ Morphismen, sodass $gf\colon X \to X$ und $fh\colon Y \to Y$ Isomorphismen sind. Zeigen Sie, dass f ein Isomorphismus ist.

Definition 2.4. Ein **Gruppoid** ist eine Kategorie, in der jeder Morphismus ein Isomorphismus ist.

Beispiel 2.5. Ein Gruppoid mit einem Objekt ist das Gleiche wie eine Gruppe.

Beispiel 2.6. Das **Fundamentalgruppoid** eines topologischen Raumes X ist die folgende Kategorie $\Pi_1(X)$. Die Objekte von $\Pi_1(X)$ sind die Elemente aus X, also die Punkte des Raumes. Für $x, y \in X$ sind die Morphismen in $\Pi_1(X)$ von x nach y die Homotopieklassen $[\gamma]$ von Wegen von x nach y, das heißt, $\gamma\colon I \to X$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$.

Die Verknüpfung in $\Pi_1(X)$ ist die übliche Zusammensetzung von Wegen $[\alpha] \bullet [\beta] = [\alpha \bullet \beta]$. Die Identität auf $x \in X$ ist die Homotopieklasse $[\epsilon_x]$ des konstanten Weges $\epsilon_x\colon I \to X$.

Die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ bezüglich eines Basispunkts $x_0 \in X$ ist nichts anders als

$$\pi_1(X, x_0) = \Pi_1(X)(x_0, x_0).$$

Die Invertierbarkeit eines Morphismus wurde durch zwei Bedingungen definiert, die wir jetzt getrennt betrachten.

Definition 2.7. Seien $i\colon A \to X$ und $r\colon X \to A$ Morphismen mit $ri = 1_A$, wie in diesem Diagramm dargestellt:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[rr, bend right, "1_A"'] & X \arrow[r, "r"] & A. \end{tikzcd}$$

Dann heißt r eine **Retraktion** von i, und i heißt ein **Schnitt** von r. Man nennt dann das Objekt A ein **Retrakt** von X.

Anders gesagt ist ein Schnitt ein Morphismus, der ein Linksinverses hat. Ein Schnitt wird auch **split Monomorphismus** genannt. Eine Retraktion ist ein Morphismus, der ein Rechtsinverses hat. Eine Retraktion wird auch **split Epimorphismus** genannt.

Beispiel 2.8. In **Set** besitzt eine Abbildung $f\colon X \to Y$ einen Schnitt genau dann, wenn f surjektiv ist. Diese Aussage beruht auf dem Auswahlaxiom, ja, ist ihm sogar äquivalent.

Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ besitzt eine Retraktion genau dann, wenn f injektiv ist. (Der Beweis dafür benutzt das Auswahlaxiom *nicht*.)

Beispiel 2.9. In **Ab** (und in **Gp**) ist jeder split Epimorphismus surjektiv, aber nicht jeder surjektive Morphismus $f\colon A \twoheadrightarrow B$ besizt einen Schnitt. Zum Beispiel:

- Die Quotientenabbildung $\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/n$ besitzt keinen Schnitt, weil es von $\mathbb{Z}/n$ nach $\mathbb{Z}$ nur den trivialen Morphismus $0\colon \mathbb{Z}/n \to \mathbb{Z}$ gibt.
- Die Quotientenabbildung $\mathbb{Z}/4 \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/2$ besitzt keinen Schnitt.

Ebenso ist jeder split Monomorphismus injektiv, aber nicht jeder injektive Morphismus $f\colon A \hookrightarrow B$ besizt eine Retraktion. Zum Beispiel:

- Der Morphismus $n\colon \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}$ (Multiplikation mit n) besitzt keine Retraktion.
- Der nicht-triviale Morphismus $\mathbb{Z}/2 \hookrightarrow \mathbb{Z}/4$ (also Multiplikation mit 2) besitzt keine Retraktion.

Beispiel 2.10. In $\mathbf{Vekt}_k$ besitzt jeder surjektive Morphismus $f\colon V \twoheadrightarrow W$ einen Schnitt. Jeder injektive Morphismus $f\colon V \hookrightarrow W$ besitzt eine Retraktion.

Beispiel 2.11. In **Top** ist jeder split Epimorphismus surjektiv, aber nicht jede surjektive Abbildung $f\colon X \twoheadrightarrow Y$ besizt einen Schnitt. Zum Beispiel:

1. Die Quotientenabbildung $q\colon D^n \twoheadrightarrow D^n/\partial D^n \cong S^n$ besitzt keinen Schnitt.
2. Die Windungsabbildung $p\colon \mathbb{R} \twoheadrightarrow S^1$ besitzt keinen Schnitt. Zur Erinnerung wird p durch diese Formel definiert:
$$p(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) \in S^1.$$
3. Die stetige Bijektion $p|_{[0,1)}\colon [0,1) \to S^1$ besitzt keinen Schnitt, weil ein Schnitt zwangsläufig die Umkehrabbildung $S^1 \to [0,1)$ wäre, die allerdings nicht stetig ist.

Beispiel 2.12. In **Top** ist jeder split Monomorphismus $i\colon A \hookrightarrow X$ eine Einbettung, aber nicht jede Einbettung besitzt eine Retraktion. Zum Beispiel:

1. Der Rand der Kugel $S^{n-1} = \partial D^n \hookrightarrow D^n$ ist kein Retrakt von D^n.
2. Der Rand des Möbiusbandes $\partial M \hookrightarrow M$ ist kein Retrakt von M.
3. Das 1-Skelett des Torus $S^1 \vee S^1 \hookrightarrow T^2$ ist kein Retrakt von T^2.

Hier ist ein anderes Beispiel. Wir erinnern daran, dass ein Retrakt eines zusammenziehbaren Raumes selber zusammenziehbar ist (Hausaufgabe 2 #2). Außerdem lässt sich jeder endliche CW-Komplex X in einen Euklidischen Raum einbetten [1, Corollary A.10]. Sobald der CW-Komplex X nicht zusammenziehbar ist, besitzt so eine Einbettung $i\colon X \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ keine Retraktion. Wie traurig wäre Topologie, wenn alle endlichen CW-Komplexe zusammenziehbar wären.

Beispiel 2.13. Hier sind Beispiele für Retrakte in **Top**.

Sei X ein Raum und $x_0 \in X$. Dann ist der Punkt $\{x_0\} \hookrightarrow X$ ein Retrakt von X, mit Retraktion (zwangsläufig) die konstante Abbildung $X \to \{x_0\}$.

Seien X und Y (nichtleere) Räume. Dann kann man X und Y als Retrakte des Produkts $X \times Y$ auffassen. Wählt man einen Punkt $y_0 \in Y$, dann besitzt die Abbildung

$$X \xrightarrow{(1_X, y_0)} X \times Y$$

eine Retraktion, zum Beispiel die Projektion $p_X\colon X \times Y \to X$.

Falls X und Y punktiert sind, kann man X und Y auch als Retrakte der Einpunktvereinigung $X \vee Y$ auffassen. Die Inklusion $X \hookrightarrow X \vee Y$ besitzt eine Retraktion, zum Beispiel die punktierte Abbildung $r_X\colon X \vee Y \twoheadrightarrow X$ mit Einschränkungen

$$\begin{cases} r_X|_X = 1_X \\ r_X|_Y = x_0, \end{cases}$$

wo $x_0 \in X$ den Basispunkt bezeichnet.

3 Funktoren

Definition 3.1. Es seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien. Ein **Funktor** $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$ besteht aus den folgenden Daten:

1. Eine Abbildung $F\colon \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$.
2. Für jede Objekte X und Y aus $\mathcal{C}$ gibt es eine Abbildung

   $$F\colon \mathcal{C}(X,Y) \to \mathcal{D}(F(X), F(Y)).$$

   Anders gesagt ordnet F jedem Morphismus $f\colon X \to Y$ in $\mathcal{C}$ einen Morphismus $F(f)\colon F(X) \to F(Y)$ in $\mathcal{D}$ zu.

Die folgenden Eigenschaften müssen gelten:

- F ist verträglich mit Verkettung. Das heißt, für alle Morphismen $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ und $g \in \mathcal{C}(Y,Z)$ gilt die Gleichung
$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$$
in $\mathcal{D}(F(X), F(Z))$.

- F ist verträglich mit Identitätsmorphismen. Das heißt, für jedes Objekt X aus $\mathcal{C}$ gilt die Gleichung
$$F(1_X) = 1_{F(X)}$$
in $\mathcal{D}(F(X), F(X))$.

Beispiel 3.2. 1. Einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ kann man seine zugrundeliegende Menge X zuordnen. Dies gibt den Vergissfunktor $U\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{Set}$, der die Topologie vergisst.

2. Eine Menge X kann man mit der diskreten Topologie versehen, wo jede Teilmenge $A \subseteq X$ offen ist. Dies gibt einen Funktor $\mathrm{Dis}\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Top}$.

3. Ebenso kann man eine Menge X mit der *indiskreten* Topologie versehen, wo nur $\emptyset$ und X offen sind. Dies gibt einen anderen Funktor $\mathrm{Ind}\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Top}$.

4. Einem topologischen Raum X kann man die Menge $\mathrm{Conn}(X)$ seiner Zusammenhangskomponenten zuordnen. Dies gibt einen Funktor $\mathrm{Conn}\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{Set}$; siehe Übungsblatt 4 #7.

5. Ebenso kann man einem Raum X die Menge $\pi_0(X)$ seiner Wegkomponenten zuordnen. Dies gibt einen Funktor $\pi_0\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{Set}$; siehe Hausaufgabe 2 #1.

6. Einer punktierten Menge (X, x_0) kann man ihre zugrundeliegende Menge X zuordnen. Dies gibt den Vergissfunktor $U\colon \mathbf{Set}_* \to \mathbf{Set}$, der den Basispunkt vergisst. Ebenso bekommt man den Vergissfunktor $U\colon \mathbf{Top}_* \to \mathbf{Top}$.

7. Für jeden Raum X betrachtet man den punktierten Raum $X_+ := X \amalg \{*\}$, mit disjunktem Basispunkt $* \in X_+$. Dies gibt einen Funktor $(-)_+\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{Top}_*$. Ebenso bekommt man den Funktor $(-)_+\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}_*$.

8. Die Fundamentalgruppe gibt einen Funktor $\pi_1\colon \mathbf{Top}_* \to \mathbf{Gp}$, der einem punktierten Raum (X, x_0) seine Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ zuordnet, bezüglich des Basispunkts x_0.

9. Der Funktor $\mathrm{Zyl}\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{Top}$ ordnet einem Raum X den *Zylinder* auf X zu, $\mathrm{Zyl}(X) := X \times I$.

10. Nach Konstruktion der Homotopie-Kategorie Ho(**Top**) gibt es einen sogenannten Quotientenfunktor $q\colon \mathbf{Top} \to \mathrm{Ho}(\mathbf{Top})$, der homotope Abbildungen identifiziert. Genauer gesagt gilt $q(X) = X$ für jeden Raum X, und für jede Räume X und Y ist

$$\mathbf{Top}(X,Y) \xrightarrow{q} \mathbf{Top}(X,Y)/\simeq_{\text{Homotopie}} = \mathrm{Ho}(\mathbf{Top})(X,Y)$$

die kanonische Quotientenabbildung.

Bemerkung 3.3. In den meisten Beispielen haben wir nur den Effekt des Funktors auf Objekten beschrieben. Den Effekt auf Morphismen kann man sich überlegen.

Bemerkung 3.4. Die Homotopieinvarianz der Funktoren $\mathrm{Conn}\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{Set}$, $\pi_0\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{Set}$, und $\pi_1\colon \mathbf{Top}_* \to \mathbf{Gp}$ kann man wie folgt interpretieren. Diese Funktoren induzieren (eindeutige) Funktoren von der jeweiligen Homotopie-Kategorie

$$\mathrm{Conn}\colon \mathrm{Ho}(\mathbf{Top}) \to \mathbf{Set}$$
$$\pi_0\colon \mathrm{Ho}(\mathbf{Top}) \to \mathbf{Set}$$
$$\pi_1\colon \mathrm{Ho}(\mathbf{Top}_*) \to \mathbf{Gp}.$$

Im Gegensatz dazu ist der Vergissfunktor $U\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{Set}$ *nicht* homotopieinvariant und induziert deshalb keinen Funktor $\mathrm{Ho}(\mathbf{Top}) \to \mathbf{Set}$. Die zugrundeliegende Abbildung einer Homotopieklasse $[f]\colon X \to Y$ ist nicht wohldefiniert!

Hier sind noch einige Beispiele, diesmal mehr algebraisch.

Beispiel 3.5.

1. Einem Vektorraum $(V, +, \cdot)$ über einem Körper k kann man seine zugrundeliegende abelsche Gruppe $(V, +)$ zuordnen. Dies gibt einen Vergissfunktor $U\colon \mathbf{Vekt}_k \to \mathbf{Ab}$, der die Skalarmultiplikation vergisst.

2. Eine abelsche Gruppe A kann man insbesondere als Gruppe auffassen. Dies definiert einen Funktor $\mathbf{Ab} \to \mathbf{Gp}$, ein Beispiel für die Inklusion einer *Unterkategorie*.

3. Sei G eine Gruppe und $[G,G] \leq G$ die von Kommutatoren erzeugte Untergruppe. Die Faktorgruppe $G_{\mathrm{ab}} := G/[G,G]$ nennt man die **Abelisierung** von G. Dies gibt einen Funktor $(-)_{\mathrm{ab}}\colon \mathbf{Gp} \to \mathbf{Ab}$.

4. Die freie Gruppe $F^{\mathrm{Gp}}(S)$ auf einer Menge S gibt einen Funktor $F^{\mathrm{Gp}}\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Gp}$.

5. Ebenso hat man die freie abelsche Gruppe $F^{\mathrm{ab}}(S)$ auf einer Menge S, die einen Funktor $F^{\mathrm{ab}}\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Ab}$ gibt.

Aufgabe 3.6. Es sei S eine Menge. Zeigen Sie, dass es einen (natürlichen) Isomorphismus

$$\left(F^{\mathrm{Gp}}(S)\right)_{\mathrm{ab}} \cong F^{\mathrm{ab}}(S)$$

gibt. Das heißt, die Abelisierung der freien Gruppe auf S ist die freie abelsche Gruppe auf S.

Aufgabe 3.7. Jeder Funktor erhält Isomorphismen, Schnitte, und Retraktionen. Das heißt, ist $f\colon X \to Y$ ein Isomorphismus (bzw. ein Schnitt, eine Retraktion), so auch $F(f)\colon F(X) \to F(Y)$.

Ist insbesondere A ein Retrakt von X, dann ist $F(A)$ ein Retrakt von $F(X)$.

Diesen Trick haben wir schon mehrmals angewandt. Mithilfe vom Funktor $\pi_1\colon \mathbf{Top}_* \to \mathbf{Gp}$ haben wir gezeigt, dass der Rand $\partial D^2 = S^1$ kein Retrakt von D^2 ist, und dass der Rand ∂M des Möbiusbandes kein Retrakt von M ist.

Literatur

[1] A. Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002. MR1867354

[2] B. Richter, *Kategorientheorie mit Anwendungen in Topologie* (2010), `http://www.math.uni-hamburg.de/home/richter/cats.pdf`.