6.132 - Algebraische Topologie
WS 2016/17
Probeklausur

Martin Frankland

31.1.2017

Aufgabe 1. Es sei A ein Retrakt eines Raumes X. **Beweisen oder widerlegen** Sie die folgenden Aussagen.

(a) Falls X wegzusammenhängend ist, dann ist A wegzusammenhängend.

(b) Falls X einfach zusammenhängend ist, dann ist A einfach zusammenhängend.

(c) Falls X zusammenziehbar ist, dann ist A zusammenziehbar.

Aufgabe 2. Sei X ein CW-Komplex mit:

- Einer 0-Zelle;
- Zwei 1-Zellen;
- Zwei 2-Zellen, angeheftet entlang Anheftabbildungen $S^1 \to X_1 = S^1 \vee S^1$, die die Wörter
$$a^5b^2,\, baba \in \langle a, b \mid \rangle \cong \pi_1(S^1 \vee S^1)$$
darstellen;
- Einer 3-Zelle, angeheftet entlang der konstanten Abbildung $S^2 \to X_2$.

Bestimmen Sie die Fundamentalgruppe
$$\pi_1(X \times K)$$
des Produkts $X \times K$, wo K die kleinsche Flasche bezeichnet.

Aufgabe 3. Finden Sie drei 4-fache zusammenhängende Überlagerungen des Torus $S^1 \times S^1$, die nicht isomorph zueinander sind. (Hier bedeutet 4-*fach*, dass die Blätterzahl 4 ist.)

Aufgabe 4. Die Grafik 1 stellt eine Δ-Struktur auf der projektiven Ebene $\mathbb{R}P^2$ dar.

Bezüglich dieser Δ-Struktur, berechnen Sie den simplizialen Kettenkomplex $C_*^{\Delta}(\mathbb{R}P^2)$ und die simpliziale Homologie $H_*^{\Delta}(\mathbb{R}P^2)$.

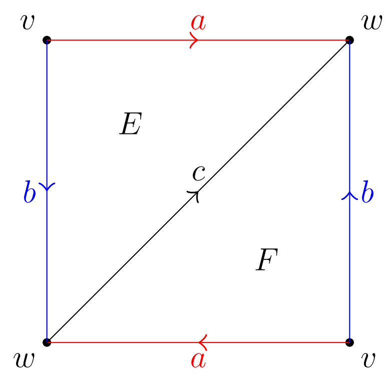

Abbildung 1: Die reelle projektive Ebene $\mathbb{R}P^2$.