6.132 - Algebraische Topologie
WS 2016/17
Simpliziale Homologie

Martin Frankland

26.1.2017

Wir betrachten den Simplizialkomplex $X = \partial\Delta^2$, den Rand eines 2-Simplex (siehe Grafik 1). In diesem Beispiel bestimmen wir den simplizialen Kettenkomplex $C_*^\Delta(X)$ sowie dessen Homologie $H_*^\Delta(X)$.

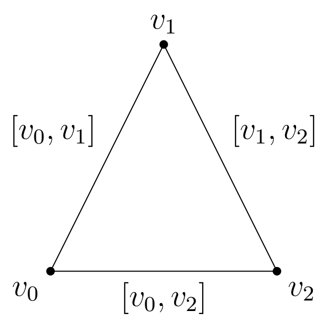

Abbildung 1: Der Simplizialkomplex $X = \partial\Delta^2$.

Der Simplizialkomplex X hat die folgenden Simplizes, die wir lexikographisch auflisten:

$$\{\text{0-Simplizes}\} = \{[v_0], [v_1], [v_2]\}$$
$$\{\text{1-Simplizes}\} = \{[v_0, v_1], [v_0, v_2], [v_1, v_2]\}.$$

Jene Mengen bilden Basen der Ketten in $C_*^\Delta(X)$:

$$C_0^\Delta(X) = \mathbb{Z}\{[v_0], [v_1], [v_2]\} \cong \mathbb{Z}^3$$
$$C_1^\Delta(X) = \mathbb{Z}\{[v_0, v_1], [v_0, v_2], [v_1, v_2]\} \cong \mathbb{Z}^3$$

und $C_n^\Delta(X) = 0$ für $n \neq 0, 1$. Jetzt berechnen wir den Randoperator $\partial\colon C_1^\Delta(X) \to C_0^\Delta(X)$:

$$\begin{aligned}
\partial[v_0, v_1] &= d_0[v_0, v_1] - d_1[v_0, v_1] \\
&= [v_1] - [v_0] \\
\partial[v_0, v_2] &= [v_2] - [v_0] \\
\partial[v_1, v_2] &= [v_2] - [v_1].
\end{aligned}$$

Bezüglich der gewählten Basen lässt sich der Kettenkomplex $C_*^\Delta(X)$ deshalb so beschreiben:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z}^3 \longrightarrow 0,$$

wo $\partial\colon \mathbb{Z}^3 \to \mathbb{Z}^3$ durch diese Abbildungsmatrix dargestellt wird:

$$\partial = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nun berechnen wir die Homologie dieses Kettenkomplexes. Im Grad 0 hat man:

$$\begin{aligned}
Z_0 &= \ker(\mathbb{Z}^3 \to 0) = \mathbb{Z}^3 \\
B_0 &= \operatorname{im} \partial = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \\
H_0 &= Z_0 / B_0 \cong \mathbb{Z},
\end{aligned}$$

von der Homologieklasse des 0-Zykels $[v_0]$ (oder $[v_1]$ oder $[v_2]$) erzeugt.

Im Grad 1 hat man:

$$\begin{aligned}
Z_1 &= \ker \partial = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \\
B_1 &= \operatorname{im}(0 \to \mathbb{Z}^3) = 0 \\
H_1 &= Z_1 / B_1 = Z_1 \cong \mathbb{Z},
\end{aligned}$$

von der Homologieklasse des 1-Zykels $[v_0, v_1] - [v_0, v_2] + [v_1, v_2]$ erzeugt.

Zusammengefasst bekommt man die simpliziale Homologie:

$$H_n^\Delta(X) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{falls } n = 0, 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$