6.132 - Algebraische Topologie
WS 2016/17
Übungsblatt der Woche 1

Martin Frankland

27.10.2016

Aufgabe 1. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass die metrische Topologie auf X tatsächlich eine Topologie ist.

Aufgabe 2. Zwei Normen $\|\cdot\|_\alpha$ und $\|\cdot\|_\beta$ auf einem reellen Vektorraum V heißen **äquivalent**, wenn es positive Zahlen $m, M \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$m\|x\|_\beta \leq \|x\|_\alpha \leq M\|x\|_\beta$$

für alle $x \in V$ gilt.

Zeigen Sie, dass die L^1-Norm, L^2-Norm, und L^∞-Norm auf $\mathbb{R}^n$, die durch die Formeln

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

definiert sind, äquivalent sind.

Aufgabe 3. Eine Norm $\|\cdot\|$ auf einem reellen Vektorraum induziert eine Metrik durch die Formel $d(x, y) = \|x - y\|$ und damit auch eine Topologie. Zeigen Sie, dass zwei Normen $\|\cdot\|_\alpha$ und $\|\cdot\|_\beta$ genau dann äquivalent sind, wenn sie dieselbe Topologie induzieren.

Aufgabe 4. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subseteq X$ eine Teilmenge. Einerseits definiert die Einschränkung $d|_{A\times A}$ wiederum eine Metrik auf A, die insbesondere die metrische Topologie $\mathcal{T}_{A,\mathrm{met}}$ induziert. Andererseits induziert d die metrische Topologie $\mathcal{T}_{X,\mathrm{met}}$ auf X, die dann die Teilraumtopologie $\mathcal{T}_{A,\mathrm{Teil}}$ auf A induziert. Zeigen Sie, dass diese zwei Topologien auf A übereinstimmen, das heißt, $\mathcal{T}_{A,\mathrm{met}} = \mathcal{T}_{A,\mathrm{Teil}}$.

Aufgabe 5. Sei X ein topologischer Raum und $A \subseteq X$ eine Teilmenge. Zeigen Sie, dass die Teilraumtopologie auf A die folgende (universelle) Eigenschaft erfüllt:

(a) Die Inklusion $\iota\colon A \hookrightarrow X$ ist stetig.

(b) Eine Abbildung $f\colon W \to A$ ist genau dann stetig, wenn die Komposition $\iota f\colon W \to X$ stetig ist, wie in diesem Diagramm dargestellt:

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[r, hook, "\iota"] & X \\ W. \arrow[ur, dashed, "f"] \arrow[urr, "\iota f"'] & & \end{tikzcd}$$

Aufgabe 6. Zeigen Sie, dass jeder Teilraum eines Hausdorff-Raumes wiederum ein Hausdorff-Raum ist.

Aufgabe 7. Zeigen Sie, dass jede abgeschlossene Teilmenge eines kompakten Raumes wiederum (als Teilraum) kompakt ist.

Aufgabe 8. Finden Sie ein Beispiel für Teilmenge $A \subseteq X$ eines Raumes X, die (als Teilraum) kompakt ist, aber nicht abgeschlossen in X.

Aufgabe 9. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ eines metrischen Raumes X heißt **beschränkt**, wenn es eine Zahl $M \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $d(x, y) \leq M$ für alle $x, y \in A$ gilt. Zeigen Sie, dass jeder kompakte Teilraum eines metrischen Raumes beschränkt ist.

Aufgabe 10. Sei $f\colon K \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen Räumen, wo K kompakt ist. Zeigen Sie, dass das Bild $f(K) \subseteq Y$ kompakt ist.