6.132 - Algebraische Topologie
WS 2016/17
Übungsblatt der Woche 11

Martin Frankland

19.1.2017

Definition. Ein Raum X heißt **lokal wegzusammenhängend** (im starken Sinne), wenn es für jeden Punkt $x \in X$ und jede Umgebung V von x eine offene Umgebung U von x mit $U \subseteq V$ gibt, sodass U wegzusammenhängend ist.

Anschaulicher gesagt, hat x beliebig kleine wegzusammenhängende Umgebungen.

Aufgabe 1. Es sei $p \colon \widetilde{X} \to X$ eine surjektive Überlagerung. Zeigen Sie, dass $\widetilde{X}$ genau dann lokal wegzusammenhängend ist, wenn X es ist.

Aufgabe 2. Es sei X ein lokal wegzusammenhängender Raum.

(a) Falls X zusammenhängend ist und $\pi_1(X)$ endlich ist, zeigen Sie, dass jede Abbildung $f \colon X \to S^1$ nullhomotop ist.

(b) Verallgemeinern Sie die Aussage auf den Fall, wo jedes Element $a \in \pi_1(X)$ endliche Ordnung hat.

(c) Verallgemeinern Sie die Aussage weiter auf den Fall, wo für jeden Basispunkt $x_0 \in X$ jedes Element $a \in \pi_1(X, x_0)$ endliche Ordnung hat. (X muss nicht zusammenhängend sein.)

Aufgabe 3. Es sei X ein zusammenhängender, lokal wegzusammenhängender Raum, mit Basispunkt $x_0 \in X$. Seien $p_1\colon \widetilde{X}_1 \to X$ und $p_2\colon \widetilde{X}_2 \to X$ zusammenhängende Überlagerungen, mit Basispunkten $\widetilde{x}_1 \in p_1^{-1}(x_0)$ und $\widetilde{x}_2 \in p_2^{-1}(x_0)$.

(a) Zeigen Sie, dass es einen (punktierten) Morphismus von Überlagerungen

$$\begin{tikzcd}
(\widetilde{X}_1, \widetilde{x}_1) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p_1"'] & & (\widetilde{X}_2, \widetilde{x}_2) \arrow[dl, "p_2"] \\
& (X, x_0) &
\end{tikzcd} \tag{1}$$

genau dann gibt, wenn die Inklusion von Untergruppen

$$p_{1*}(\pi_1(\widetilde{X}_1, \widetilde{x}_1)) \subseteq p_{2*}(\pi_1(\widetilde{X}_2, \widetilde{x}_2))$$

in $\pi_1(X, x_0)$ gilt. Ferner ist ein solcher Morphismus f eindeutig, falls es ihn gibt.

(b) Falls $\pi_1(\widetilde{X}_1) = \{1\}$ gilt, folgern Sie aus (a), dass es für jede zusammenhängende Überlagerung $p_2\colon (\widetilde{X}_2, \widetilde{x}_2) \to (X, x_0)$ einen eindeutigen Morphismus f gibt wie im Diagramm (1).

(c) Folgern Sie aus (a), dass die Überlagerungen $p_1\colon (\widetilde{X}_1, \widetilde{x}_1) \to (X, x_0)$ und $p_2\colon (\widetilde{X}_2, \widetilde{x}_2) \to (X, x_0)$ genau dann (punktiert) isomorph sind, wenn die Gleichung von Untergruppen

$$p_{1*}(\pi_1(\widetilde{X}_1, \widetilde{x}_1)) = p_{2*}(\pi_1(\widetilde{X}_2, \widetilde{x}_2))$$

in $\pi_1(X, x_0)$ gilt.

(d) Zeigen Sie, dass die Überlagerungen $p_1\colon \widetilde{X}_1 \to X$ und $p_2\colon \widetilde{X}_2 \to X$ genau dann (unpunktiert) isomorph sind, wenn die Untergruppen

$$p_{1*}(\pi_1(\widetilde{X}_1, \widetilde{x}_1)) \quad \text{und} \quad p_{2*}(\pi_1(\widetilde{X}_2, \widetilde{x}_2))$$

konjugiert zueinander sind in $\pi_1(X, x_0)$.

Aufgabe 4. Man bezeichnet mit $T^2 = S^1 \times S^1$ den Torus.

(a) Zeigen Sie, dass die Quotientenabbildung

$$q\colon \mathbb{R}^2 \twoheadrightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \cong T^2,$$

die die Untergruppe $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$ herausteilt, die universelle Überlagerung des Torus ist.

(b) Sei $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Finden Sie eine zusammenhängende Überlagerung $p\colon \widetilde{X} \to T^2$ mit

$$p_*(\pi_1(\widetilde{X})) = m\mathbb{Z} \times 0 \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \cong \pi_1(T^2).$$

Hier bezeichnet $m\mathbb{Z} \times 0 = \langle \left[\begin{smallmatrix} m \\ 0 \end{smallmatrix}\right] \rangle \subset \mathbb{Z}^2$ die vom Element $\left[\begin{smallmatrix} m \\ 0 \end{smallmatrix}\right] \in \mathbb{Z}^2$ erzeugte Untergruppe.

(c) Seien allgemeiner $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ und $\vec{v} \in \mathbb{Z}^2$ ein Vektor mit teilerfremden Komponenten, wie z.B. $\vec{v} = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$ in Aufgabe (b). Finden Sie eine zusammenhängende Überlagerung $p\colon \widetilde{X} \to T^2$ mit

$$p_*(\pi_1(\widetilde{X})) = \langle m\vec{v} \rangle \subset \mathbb{Z}^2 \cong \pi_1(T^2).$$

(d) Seien $m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Finden Sie eine zusammenhängende Überlagerung $p\colon \widetilde{X} \to T^2$ mit

$$p_*(\pi_1(\widetilde{X})) = m\mathbb{Z} \times n\mathbb{Z} = \left\langle \begin{bmatrix} m \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ n \end{bmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{Z}^2 \cong \pi_1(T^2).$$

(e) Seien allgemeiner $m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ und $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ eine Basis von $\mathbb{Z}^2$, wie z.B. $\vec{v}_1 = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right], \vec{v}_2 = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$ in Aufgabe (d). Finden Sie eine zusammenhängende Überlagerung $p\colon \widetilde{X} \to T^2$ mit

$$p_*(\pi_1(\widetilde{X})) = \langle m\vec{v}_1, n\vec{v}_2 \rangle \subseteq \mathbb{Z}^2 \cong \pi_1(T^2).$$

(f) Zeigen Sie, dass jede zusammenhängende Überlagerung $p\colon \widetilde{X} \to T^2$ isomorph ist zu einer der Form in (a), (c), oder (e).