6.132 - Algebraische Topologie
WS 2016/17
Ausgewählte Lösungen der Woche 1

Martin Frankland

27.10.2016

Aufgabe 3. Eine Norm $\|\cdot\|$ auf einem reellen Vektorraum V induziert eine Metrik durch die Formel $d(x, y) = \|x - y\|$ und damit auch eine Topologie. Zeigen Sie, dass zwei Normen $\|\cdot\|_\alpha$ und $\|\cdot\|_\beta$ genau dann äquivalent sind, wenn sie dieselbe Topologie induzieren.

Lösung. ($\Rightarrow$) Seien $m, M \in \mathbb{R}$ positive Zahlen, sodass

$$m\|x\|_\beta \leq \|x\|_\alpha \leq M\|x\|_\beta$$

für alle $x \in V$ gilt. Sei $U \subseteq V$ eine offene Teilmenge bezüglich der Norm α, und $x \in U$. Dann gibt es eine Zahl $r > 0$ sodass die Inklusion

$$B_\alpha(x, r) \subseteq U$$

gilt, wo B_α den offenen Ball bezüglich der Metrik α bezeichnet. Dann gilt auch

$$B_\beta(x, \frac{r}{M}) \subseteq B_\alpha(x, r) \subseteq U,$$

was zeigt, dass U offen ist bezüglich der Metrik β. Die erste Inklusion folgt aus der Ungleichung

$$\begin{aligned}
d_\alpha(x, y) &= \|x - y\|_\alpha \\
&\leq M\|x - y\|_\beta \\
&= M d_\beta(x, y) \\
&< M\frac{r}{M} \quad \text{für } y \in B_\beta(x, \frac{r}{M}) \\
&= r.
\end{aligned}$$

Die Ungleichung $\|x\|_\beta \leq \frac{1}{m}\|x\|_\alpha$ zeigt ebenfalls, dass jede offene Teilmenge bezüglich der Norm β auch offen ist bezüglich der Norm α.

($\Leftarrow$) Da der offene Ball $B_\alpha(0,1)$ auch offen ist bezüglich der Metrik β, gibt es eine Zahl $r > 0$ mit $B_\beta(0,r) \subseteq B_\alpha(0,1)$. Für alle $x \in V$ gilt dann die Ungleichung

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{r}{2} \frac{x}{\|x\|_\beta} \right\|_\alpha < 1 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{r}{2\|x\|_\beta} \|x\|_\alpha < 1 \\
\Leftrightarrow\ & \|x\|_\alpha < \frac{2}{r} \|x\|_\beta.
\end{aligned}$$

Ebenfalls gibt es eine Zahl $m > 0$ sodass $m\|x\|_\beta \leq \|x\|_\alpha$ für alle $x \in V$ gilt. □

Alternative Lösung für die Implikation ($\Rightarrow$). Die Ungleichung $d_\alpha(x,y) \leq M d_\beta(x,y)$ zeigt, dass die Identität

$$\mathrm{id} \colon (V, d_\beta) \to (V, d_\alpha)$$

Lipschitz-stetig ist, insbesondere stetig. Ebenfalls zeigt die Ungleichung $d_\beta(x,y) \leq \frac{1}{m} d_\alpha(x,y)$, dass die Identität

$$\mathrm{id} \colon (V, d_\alpha) \to (V, d_\beta)$$

stetig ist, und daher ein Homöomorphismus. □

Aufgabe 4. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subseteq X$ eine Teilmenge. Einerseits definiert die Einschränkung $d|_{A\times A}$ wiederum eine Metrik auf A, die insbesondere die metrische Topologie $\mathcal{T}_{A,\mathrm{met}}$ induziert. Andererseits induziert d die metrische Topologie $\mathcal{T}_{X,\mathrm{met}}$ auf X, die dann die Teilraumtopologie $\mathcal{T}_{A,\mathrm{Teil}}$ auf A induziert. Zeigen Sie, dass diese zwei Topologien auf A übereinstimmen, das heißt, $\mathcal{T}_{A,\mathrm{met}} = \mathcal{T}_{A,\mathrm{Teil}}$.

Lösung. Für alle $a \in A$ und $r > 0$ gilt die Gleichung

$$B_A(a, r) = B_X(a, r) \cap A,$$

was zeigt, dass der offene Ball $B_A(a, r) \subseteq A$ auch offen in der Teilraumtopologie ist. Die Inklusion $\mathcal{T}_{A,\mathrm{met}} \subseteq \mathcal{T}_{A,\mathrm{Teil}}$ folgt daraus, dass die offenen Bälle $B_A(a, r)$ eine Basis der metrischen Topologie auf A bilden.

Umgekehrt sei $U \subseteq A$ eine offene Teilmenge in der Teilraumtopologie, das heißt, $U = V \cap A$ für eine offene Teilmenge $V \subseteq X$. Sei $a \in U$. Da $V \subseteq X$ offen ist (in der metrischen Topologie), gibt es eine Zahl $r > 0$ mit $B_X(a, r) \subseteq V$. Daraus folgt die Inklusion

$$B_A(a, r) = B_X(a, r) \cap A \subseteq V \cap A = U,$$

was zeigt, dass $U \subseteq A$ offen in der metrischen Topologie ist. $\square$

Alternative Lösung für die Inklusion $\mathcal{T}_{A,\mathrm{Teil}} \subseteq \mathcal{T}_{A,\mathrm{met}}$. Die Gleichung $d_A(a, b) = d_X(a, b)$ für alle $a, b \in A$ zeigt, dass die Inklusionsabbildung $\iota\colon (A, d_A) \hookrightarrow (X, d_X)$ Lipschitz-stetig ist, insbesondere stetig. Daraus folgt die Inklusion $\mathcal{T}_{A,\mathrm{Teil}} \subseteq \mathcal{T}_{A,\mathrm{met}}$, weil die Teilraumtopologie auf A die Kleinste ist, die $\iota\colon A \hookrightarrow X$ stetig macht. $\square$

Aufgabe 6. Zeigen Sie, dass jeder Teilraum eines Hausdorff-Raumes wiederum ein Hausdorff-Raum ist.

Lösung. Seien X ein Hausdorff-Raum, $A \subseteq X$ ein Teilraum, und $a, b \in A$ verschiedene Punkte. Da X hausdorffsch ist, gibt es disjunkte Umgebungen $a \in U$ und $b \in V$ in X. Dann bilden $U \cap A$ und $V \cap A$ disjunkte Umgebungen jeweils von a und b in A. $\square$

Aufgabe 8. Finden Sie ein Beispiel für Teilmenge $A \subseteq X$ eines Raumes X, die (als Teilraum) kompakt ist, aber nicht abgeschlossen in X.

Lösung. Sei X ein indiskreter Raum, das heißt, nur die leere Teilmenge $\emptyset$ und die Grundmenge X sind offen in X. Dann ist jede Teilmenge $A \subseteq X$ kompakt. Solange X mindestens zwei Punkte enthält, gibt es eine nicht-triviale Teilmenge $\emptyset \subset A \subset X$, die dann nicht abgeschlossen in X ist. $\square$

Alternative Lösung. Sei X ein Raum mit der kofiniten Topologie, das heißt, eine Teilmenge $A \subseteq X$ ist genau dann offen, wenn ihr Komplement $X \setminus A$ endlich ist oder $A = \emptyset$. Dann ist jede Teilmenge $A \subseteq X$ kompakt. Solange X unendlich ist, gibt es eine unendliche echte Teilmenge $A \subset X$, die dann nicht abgeschlossen in X ist. $\square$