

6.132 - Algebraische Topologie  
WS 2016/17  
Übungsblatt der Woche 2

Martin Frankland

3.11.2016

**Aufgabe 1.** Sei  $\mathcal{S}$  ein Mengensystem über einem topologischen Raum  $X$ . Zeigen Sie, dass die von  $\mathcal{S}$  erzeugte Topologie  $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$  tatsächlich eine Topologie ist.

Zur Erinnerung besteht  $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$  aus beliebigen Vereinigungen von endlichen Schnitten von Teilmengen aus  $\mathcal{S}$ .

**Aufgabe 2.** Seien  $(X, d_X)$  und  $(Y, d_Y)$  metrische Räume. Die Formel

$$d((x, y), (x', y')) = d_X(x, x') + d_Y(y, y')$$

definiert eine Metrik auf  $X \times Y$ . Zeigen Sie, dass die metrische Topologie auf  $X \times Y$  gleich ist der Produkttopologie der jeweiligen metrischen Topologien auf  $X$  und  $Y$ .

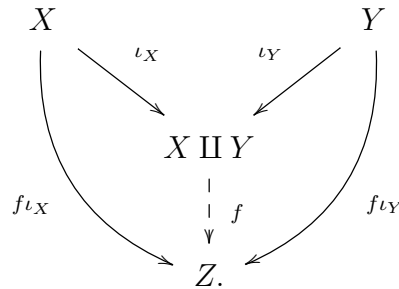
**Aufgabe 3.** Seien  $X$  und  $Y$  kompakte Räume. Zeigen Sie, dass der Produktraum  $X \times Y$  kompakt ist.

**Aufgabe 4.** Seien  $A \subseteq X$  und  $B \subseteq Y$  Teilmengen von Räumen. Einerseits erben  $A$  und  $B$  die jeweiligen Teilraumtopologien, die dann die Produkttopologie  $\mathcal{T}_{A \times B, \text{Prod}}$  auf  $A \times B$  induzieren. Andererseits trägt  $X \times Y$  die Produkttopologie, die dann die Teilraumtopologie  $\mathcal{T}_{A \times B, \text{Teil}}$  auf die Teilmenge  $A \times B \subseteq X \times Y$  induziert. Zeigen Sie, dass diese zwei Topologien auf  $A \times B$  übereinstimmen, das heißt,  $\mathcal{T}_{A \times B, \text{Prod}} = \mathcal{T}_{A \times B, \text{Teil}}$ .

**Aufgabe 5.** Zeigen Sie, dass der  $n$ -Würfel und die  $n$ -Kugel homöomorph sind:  $I^n \cong D^n$ .

**Aufgabe 6.** Seien  $X$  und  $Y$  topologische Räume. Zeigen Sie, dass die Summentopologie auf der disjunkten Vereinigung  $X \amalg Y$  die folgende (universelle) Eigenschaft erfüllt:

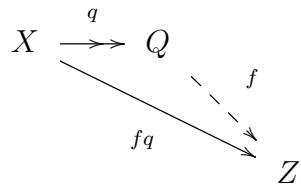
- (a) Die Inklusionen der Summanden  $\iota_X: X \hookrightarrow X \amalg Y$  und  $\iota_Y: Y \hookrightarrow X \amalg Y$  sind stetig.
- (b) Eine Abbildung  $f: X \amalg Y \rightarrow Z$  ist genau dann stetig, wenn ihre Einschränkung auf jedem Summanden  $f|_X = f\iota_X: X \rightarrow Z$  und  $f|_Y = f\iota_Y: Y \rightarrow Z$  stetig ist, wie in diesem Diagramm dargestellt:



**Aufgabe 7.** Seien  $X$  und  $Y$  kompakte Räume. Zeigen Sie, dass der Summenraum  $X \amalg Y$  kompakt ist.

**Aufgabe 8.** Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $q: X \rightarrow Q$  eine surjektive Abbildung. Zeigen Sie, dass die Quotiententopologie auf  $Q$  die folgende (universelle) Eigenschaft erfüllt:

- (a) Die Quotientenabbildung  $q: X \rightarrow Q$  ist stetig.
- (b) Eine Abbildung  $f: Q \rightarrow Z$  ist genau dann stetig, wenn die Komposition  $fq: X \rightarrow Z$  stetig ist, wie in diesem Diagramm dargestellt:



**Aufgabe 9.** Finden Sie einen Quotientenraum von  $\mathbb{R}$ , der nicht hausdorffsch ist.

**Aufgabe 10.** Man betrachte den Rand der  $n$ -Kugel  $\partial D^n \cong S^{n-1}$ . Zeigen Sie, dass der Quotientenraum  $D^n/\partial D^n$  homöomorph zu einer  $n$ -Sphäre ist:  $D^n/\partial D^n \cong S^n$ . Hier hat man den Rand  $\partial D^n$  auf einen Punkt kollabiert.

**Aufgabe 11.** Zeigen Sie, dass die Räume

$$D^n \amalg D^n / \sim \cong S^n$$

homöomorph sind, wo die Äquivalenzrelation  $\sim$  wie folgt definiert wird. Für  $x \in D^n$  bezeichne  $x_{(1)} \in D^n \amalg D^n$  den entsprechenden Punkt im ersten Summanden, das heißt,  $x_{(1)} = \iota_1(x)$ , und ebenso  $x_{(2)} = \iota_2(x) \in D^n \amalg D^n$ . Dann identifiziert man für jedes  $x \in \partial D^n$  die entsprechenden Punkte  $x_{(1)} \sim x_{(2)}$ .

**Aufgabe 12.** Eine Teilmenge  $A \subseteq \mathbb{R}$  heißt ein **Intervall**, wenn für alle  $a, b \in A$  mit  $a < b$  die Inklusion  $[a, b] \subseteq A$  gilt. Zeigen Sie, dass ein Teilraum  $A \subseteq \mathbb{R}$  genau dann zusammenhängend ist, wenn  $A$  ein Intervall ist.

**Aufgabe 13.** Sei  $f: X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung zwischen Räumen, wo  $X$  zusammenhängend ist. Zeigen Sie, dass das Bild  $f(X) \subseteq Y$  zusammenhängend ist.