6.132 - Algebraische Topologie
WS 2016/17
Ausgewählte Lösungen der Woche 2

Martin Frankland

3.11.2016

Aufgabe 4. Seien $A \subseteq X$ und $B \subseteq Y$ Teilmengen von Räumen. Einerseits erben A und B die jeweiligen Teilraumtopologien, die dann die Produkttopologie $\mathcal{T}_{A\times B,\mathrm{Prod}}$ auf $A \times B$ induzieren. Andererseits trägt $X \times Y$ die Produkttopologie, die dann die Teilraumtopologie $\mathcal{T}_{A\times B,\mathrm{Teil}}$ auf die Teilmenge $A \times B \subseteq X \times Y$ induziert. Zeigen Sie, dass diese zwei Topologien auf $A \times B$ übereinstimmen, das heißt, $\mathcal{T}_{A\times B,\mathrm{Prod}} = \mathcal{T}_{A\times B,\mathrm{Teil}}$.

Lösung. Für alle Teilmengen $U \subseteq X$ und $V \subseteq Y$ gilt die Gleichung

$$(U \times V) \cap (A \times B) = (U \cap A) \times (V \cap B).$$

Das Mengensystem über $X \times Y$

$$\mathcal{B}_{X\times Y} = \{U \times V \mid U \subseteq X \text{ offen}, V \subseteq Y \text{ offen}\}$$

bildet eine Basis der Produkttopologie auf $X \times Y$. Deshalb bildet das Mengensystem

$$\mathcal{B}_{A\times B,\mathrm{Teil}} = \{(U \times V) \cap (A \times B) \mid U \subseteq X \text{ offen}, V \subseteq Y \text{ offen}\}$$

eine Basis der Teilraumtopologie auf $A \times B$. Andererseits gilt die Gleichung

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{A\times B,\mathrm{Teil}} &= \{(U \cap A) \times (V \cap B) \mid U \subseteq X \text{ offen}, V \subseteq Y \text{ offen}\} \\ &= \{U' \times V' \mid U' \subseteq A \text{ offen}, V' \subseteq B \text{ offen}\},\end{aligned}$$

wo Letzteres eine Basis der Produkttopologie auf $A \times B$ bildet. □

Alternative Lösung. Die Inklusionsabbildungen $\iota_A \colon A \hookrightarrow X$ und $\iota_B \colon B \hookrightarrow Y$ sind stetig. Ihr Produkt

$$A \times B \xrightarrow{\iota_A \times \iota_B = \iota_{A \times B}} X \times Y$$

ist auch stetig bezüglich der Produkttopologien. Daraus folgt $\mathcal{T}_{A\times B,\mathrm{Teil}} \subseteq \mathcal{T}_{A\times B,\mathrm{Prod}}$.

Die Projektionen $p_X \colon X \times Y \to X$ und $p_X \colon X \times Y \to Y$ sind stetig. Das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
(A \times B, \mathcal{T}_{A\times B,\mathrm{Teil}}) \arrow[r, hook, "\iota_{A\times B}"] \arrow[d, "p_A"'] & X \times Y \arrow[d, "p_X"'] \\
A \arrow[r, hook, "\iota_A"] & X
\end{tikzcd}$$

zeigt, dass $\iota_A p_A = p_X \iota_{A\times B}$ stetig ist, und daher $p_A \colon (A \times B, \mathcal{T}_{A\times B,\mathrm{Teil}}) \to A$ auch. Ebenfalls ist die Projektion $p_B \colon (A \times B, \mathcal{T}_{A\times B,\mathrm{Teil}}) \to B$ stetig. Daraus folgt $\mathcal{T}_{A\times B,\mathrm{Prod}} \subseteq \mathcal{T}_{A\times B,\mathrm{Teil}}$. $\square$

Aufgabe 5. Zeigen Sie, dass der n-Würfel und die n-Kugel homöomorph sind: $I^n \cong D^n$.

Lösung. Statt des Intervalls $I = [0,1]$ nehmen wir das homöomorphe Intervall $[-1,1] \cong I$ und den Würfel $[-1,1]^n \cong I^n$. Es gelten die Gleichungen

$$\begin{cases} D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 \leq 1\} \\ [-1,1]^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_\infty \leq 1\} \,. \end{cases}$$

Wir definieren die Abbildung $f\colon D^n \to [-1,1]^n$ durch die Formel

$$f(x) = \begin{cases} \|x\|_2 \frac{x}{\|x\|_\infty} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

und ebenfalls die Abbildung $g\colon [-1,1]^n \to D^n$ durch

$$g(x) = \begin{cases} \|x\|_\infty \frac{x}{\|x\|_2} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Dann sind f und g beide stetig, und invers zueinander. $\square$

Aufgabe 8. Sei X ein topologischer Raum und $q\colon X \twoheadrightarrow Q$ eine surjektive Abbildung. Zeigen Sie, dass die Quotiententopologie auf Q die folgende (universelle) Eigenschaft erfüllt:

(a) Die Quotientenabbildung $q\colon X \twoheadrightarrow Q$ ist stetig.

(b) Eine Abbildung $f\colon Q \to Z$ ist genau dann stetig, wenn die Komposition $fq\colon X \to Z$ stetig ist, wie in diesem Diagramm dargestellt:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, two heads, "q"] \arrow[drr, "fq"'] & Q \arrow[dr, dashed, "f"] & \\ & & Z. \end{tikzcd}$$

Lösung. (a) Sei $U \subseteq Q$ eine offene Teilmenge. Dann ist ihr Urbild $q^{-1}(U) \subseteq X$ offen in X, per Definition der Quotiententopologie auf Q.

(b) Wenn $f\colon Q \to Z$ stetig ist, dann ist $fq\colon X \to Z$ stetig, als Komposition von stetigen Abbildungen. Nehmen wir jetzt an, dass $fq\colon X \to Z$ stetig ist. Sei $V \subseteq Z$ eine offene Teilmenge. Wir wollen zeigen, dass ihr Urbild $f^{-1}(V) \subseteq Q$ offen ist. Da $fq\colon X \to Z$ stetig ist, ist das Urbild

$$(fq)^{-1}(V) = q^{-1}f^{-1}(V) \subseteq X$$

offen in X. Per Definition der Quotiententopologie, ist $f^{-1}(V) \subseteq Q$ offen in Q. $\square$

Aufgabe 9. Finden Sie einen Quotientenraum von $\mathbb{R}$, der nicht hausdorffsch ist.

Lösung. Kollabiert man die Teilmenge $(5,6) \subset \mathbb{R}$ auf einen Punkt, erhält man einen Quotientenraum $\mathbb{R}/(5,6)$, der nicht hausdorffsch ist—nicht einmal T_1! Jede Umgebung von 5 in $\mathbb{R}/(5,6)$ enthält den Punkt $(5,6) \in \mathbb{R}/(5,6)$. $\square$

Aufgabe 11. Zeigen Sie, dass die Räume

$$D^n \amalg D^n / \sim \cong S^n$$

homöomorph sind, wo die Äquivalenzrelation $\sim$ wie folgt definiert wird. Für $x \in D^n$ bezeichne $x^{(1)} \in D^n \amalg D^n$ den entsprechenden Punkt im ersten Summanden, das heißt, $x^{(1)} = \iota_1(x)$, und ebenso $x^{(2)} = \iota_2(x) \in D^n \amalg D^n$. Dann identifiziert man für jedes $x \in \partial D^n$ die entsprechenden Punkte $x^{(1)} \sim x^{(2)}$.

Lösung. Betrachte man $\mathbb{R}^{n+1} \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ und die Abbildung $f_O \colon D^n \to S^n$, die die Kugel auf die obere Hemisphäre abbildet:

$$f_O(x) = (x, \sqrt{1 - \|x\|^2}).$$

Dann ist f_O stetig, weil ihre $n+1$ Komponenten stetig sind. Darüber hinaus ist f_O ein Homöomorphismus auf die obere Hemisphäre, mit Inverse die Projektion

$$p_{\mathbb{R}^n} \colon S^n_{\text{obere}} \to D^n$$

auf die ersten n Koordinaten. Bezeichnet man $x = (x_1, \ldots, x_n)$, dann liegt ein Punkt

$$(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = (x, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$$

in der oberen Hemisphäre $S^n_{\text{obere}} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ genau dann, wenn er die Bedingungen

$$\begin{cases} x_1^2 + \ldots + x_n^2 + x_{n+1}^2 = 1 = \|x\|^2 + x_{n+1}^2 \\ x_{n+1} \geq 0 \end{cases}$$

erfüllt. Das heißt, der Punkt ist der Gestalt $(x, \sqrt{1 - \|x\|^2})$ für ein $x \in D^n$.

Betrachte man ebenfalls die Abbildung $f_U \colon D^n \to S^n$, die die Kugel auf die untere Hemisphäre abbildet:

$$f_U(x) = (x, -\sqrt{1 - \|x\|^2}).$$

Wir betrachten die Abbilding $f \colon D^n \amalg D^n \to S^n$, deren Einschränkung auf den jeweiligen Summanden f_O und f_U ist. Dann ist f stetig und außerdem surjektiv, wegen der Gleichung $S^n = S^n_{\text{obere}} \cup S^n_{\text{untere}}$.

Allerdings ist f nicht injektiv. Da die Einschränkungen f_O und f_U injektiv sind, kann die Injektivität von f nur dann scheitern, wenn man Argumente aus verschiedenen Summanden nimmt:

$$\begin{aligned} f(x^{(1)}) = f(y^{(2)}) &\Leftrightarrow f_O(x) = f_U(y) \\ &\Leftrightarrow \left(x, \sqrt{1 - \|x\|^2}\right) = \left(y, -\sqrt{1 - \|y\|^2}\right) \\ &\Leftrightarrow x = y \text{ und } \|x\| = \|y\| = 1 \\ &\Leftrightarrow x^{(1)} \sim y^{(2)}. \end{aligned}$$

Daher induziert f eine stetige Abbildung von dem Quotienten

$$\overline{f}\colon (D^n \amalg D^n)/\sim \;\to S^n,$$

die surjektiv ist, weil f es war, und auch injektiv, wegen der Implikation $f(x) = f(x') \Rightarrow x \sim x'$.

Da die Kugel D^n kompakt ist, ist der Summenraum $D^n \amalg D^n$ auch kompakt, wie auch der Quotientenraum $(D^n \amalg D^n)/\sim$. Nun ist $\overline{f}$ eine stetige Bijektion von einem kompakten Raum in einen Hausdorff-Raum, deshalb ein Homöomorphismus. □