6.132 - Algebraische Topologie
WS 2016/17
Ausgewählte Lösungen der Woche 5

Martin Frankland

24.11.2016

Aufgabe 1. Seien $f, g\colon X \to Y$ Abbildungen und $H\colon X \times I \to Y$ eine Homotopie von f nach g. Es sei $x_0 \in X$ ein beliebiger Basispunkt. Zeigen Sie, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \pi_1(X, x_0) \arrow[r, "f_*"] \arrow[dr, "g_*"'] & \pi_1(Y, f(x_0)) \arrow[d, "\varphi_\gamma", "\cong"'] \\ & \pi_1(Y, g(x_0)) \end{tikzcd}$$

kommutiert, wo $\gamma\colon I \to Y$ den Weg $\gamma(t) = H(x_0, t)$ bezeichnet, und φ_γ den zugehörigen Basispunktwechsel-Isomorphismus

$$\varphi_\gamma([\alpha]) = [\gamma]^{-1} \bullet [\alpha] \bullet [\gamma].$$

Lösung. Siehe Hatcher Lemma 1.19. $\square$

Aufgabe 2. Seien (X, x_0) und (Y, y_0) punktierte Räume. Zeigen Sie, dass das Produkt $(X \times Y, (x_0, y_0))$ die folgende (universelle) Eigenschaft erfüllt:

(a) Die Projektionen auf jeden Faktor $p_X \colon (X \times Y, (x_0, y_0)) \to (X, x_0)$ und $p_Y \colon (X \times Y, (x_0, y_0)) \to (Y, y_0)$ sind punktiert.

(b) Für jeden Punktierten Raum (W, w_0) mit punktierten Abbildungen $f_X \colon (W, w_0) \to (X, x_0)$ und $f_Y \colon (W, w_0) \to (Y, y_0)$, gibt es eine eindeutige punktierte Abbildung

$$f \colon (W, w_0) \to (X \times Y, (x_0, y_0))$$

mit $p_X f = f_X$ und $p_Y f = f_Y$, wie in diesem Diagramm dargestellt:

$$\begin{tikzcd}
 & W \arrow[ddl, bend right, "f_X"'] \arrow[d, dashed, "\exists! f"] \arrow[ddr, bend left, "f_Y"] & \\
 & X \times Y \arrow[dl, "p_X"] \arrow[dr, "p_Y"'] & \\
X & & Y.
\end{tikzcd}$$

Lösung. **(a)** Beide Projektionen $p_X \colon X \times Y \to X$ und $p_Y \colon X \times Y \to Y$ sind stetig. Ferner gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned} p_X(x_0, y_0) &= x_0 \\ p_Y(x_0, y_0) &= y_0, \end{aligned}$$

sodass p_X und p_Y punktierte Abbildungen sind.

(b) Wegen der universellen Eigenschaft des Produkts von Räumen, gibt es eine eindeutige (stetige) Abbildung $f \colon W \to X \times Y$ mit $p_X f = f_X$ und $p_Y f = f_Y$. Diese Abbildung f erfüllt die Gleichung

$$\begin{aligned} f(w_0) &= (p_X f(w_0), p_Y f(w_0)) \\ &= (f_X(w_0), f_Y(w_0)) \\ &= (x_0, y_0), \end{aligned}$$

wo die letzte Gleichung daraus folgt, dass f_X und f_Y punktiert sind. Dies zeigt, dass $f \colon W \to X \times Y$ punktiert ist. $\square$

Aufgabe 3. Seien W, X, und Y Räume. Zeigen Sie, dass die von den Projektionen $p_X \colon X \times Y \to X$ und $p_Y \colon X \times Y \to Y$ induzierte Funktion

$$[W, X \times Y] \xrightarrow[\cong]{((p_X)_*, (p_Y)_*)} [W, X] \times [W, Y]$$

bijektiv ist. Hier bezeichnet $[W, X]$ die Menge der Homotopieklassen von Abbildungen $W \to X$.

Lösung. Man bezeichnet mit $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(W, X)$ die Menge der stetigen Abbildungen $W \to X$. Die universelle Eigenschaft des Produkts von Räumen besagt, dass die von den Projektionen induzierte Funktion

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(W, X \times Y) \xrightarrow[\cong]{((p_X)_*, (p_Y)_*)} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(W, X) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(W, Y)$$

bijektiv ist. Mit dem Zylinder $W \times I$ angewandt, liefert diese universelle Eigenschaft die Bijektion

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(W \times I, X \times Y) \xrightarrow[\cong]{((p_X)_*, (p_Y)_*)} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(W \times I, X) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(W \times I, Y).$$

Dies zeigt, dass zwei Abbildungen

$$(f, g), (f', g') \colon W \to X \times Y$$

genau dann homotop zueinander sind, wenn sie in jeder Koordinate homotop zueinander sind, das heißt, die Abbildungen $f, f' \colon W \to X$ sind homotop zueinander und $g, g' \colon W \to Y$ sind homotop zueinander. Anders gesagt gilt die Äquivalenz

$$(f, g) \simeq (f', g') \Leftrightarrow f \simeq f' \text{ und } g \simeq g'.$$

Im kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(W, X \times Y) \arrow[r, "((p_X)_*, (p_Y)_*)", "\cong"'] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(W, X) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(W, Y) \arrow[d] \\
{[W, X \times Y]} \arrow[r, "((p_X)_*, (p_Y)_*)"] & {[W, X] \times [W, Y]}
\end{tikzcd}$$

teilen die nach unten zeigenden Pfeile die Homotopierelation heraus. Da die Homotopierelation auf $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(W, X \times Y)$ der koordinatenweise Homotopierelation auf $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(W, X) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(W, Y)$ entspricht, ist die Funktion $[W, X \times Y] \to [W, X] \times [W, Y]$ ebenfalls bijektiv. $\square$

Aufgabe 4. Seien (W, w_0), (X, x_0), und (Y, y_0) punktierte Räume. Zeigen Sie, dass die von den Projektionen $p_X \colon X \times Y \to X$ und $p_Y \colon X \times Y \to Y$ induzierte Funktion

$$[(W, w_0), (X \times Y, (x_0, y_0))]_* \xrightarrow[\cong]{((p_X)_*, (p_Y)_*)} [(W, w_0), (X, x_0)]_* \times [(W, w_0), (Y, y_0)]_*$$

bijektiv ist. Hier bezeichnet $[(W, w_0), (X, x_0)]_*$ die Menge der punktierten Homotopieklassen von punktierten Abbildungen $(W, w_0) \to (X, x_0)$.

Bemerkung. Man lässt üblicherweise die Basispunkte in der Notation weg.

Lösung. Eine Homotopie

$$H \colon W \times I \to X \times Y$$

ist genau dann punktiert, wenn beide Homotopien

$$\begin{cases} p_X H \colon W \times I \to X \\ p_Y H \colon W \times I \to Y \end{cases}$$

punktiert sind. Expliziter gesagt gilt die Gleichung

$$H(w_0, t) = (x_0, y_0) \quad \text{für alle } t \in I$$

genau dann, wenn die Gleichungen

$$\begin{cases} p_X H(w_0, t) = x_0 & \text{für alle } t \in I \\ p_Y H(w_0, t) = y_0 & \text{für alle } t \in I \end{cases}$$

gelten. Deshalb geht das Argument in der Aufgabe 3 analog, wenn man die Relation der *punktierten* Homotopie herausteilt. $\square$

Aufgabe 5. **(a)** Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung, die die Hochhebungseigenschaft für Wege erfüllt. Man setzt voraus, dass die auf Wegkomponenten induzierte Funktion $\pi_0(f)\colon \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ surjektiv ist. Zeigen Sie, dass $f\colon X \to Y$ surjektiv ist.

Lösung. Sei $y \in Y$ ein beliebiger Punkt. Nach Voraussetzung gibt es eine Wegkomponente $[x] \in \pi_0(X)$ mit $\pi_0(f)[x] = [f(x)] = [y]$. Das heißt, es gibt einen Punkt $x \in X$ mit einem Weg $\gamma\colon I \to Y$ von $f(x)$ nach y. Da f die Hochhebungseigenschaft für Wege erfüllt, gibt es einen Weg $\widetilde{\gamma}\colon I \to X$ mit $f\widetilde{\gamma} = \gamma$ und $\widetilde{\gamma}(0) = x$, wie in diesem Diagramm dargestellt:

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r, "x"] \arrow[d, hook] & X \arrow[d, "f"] \\
I \arrow[r, "\gamma"'] \arrow[ur, dashed, "\exists\widetilde{\gamma}"] & Y.
\end{tikzcd}$$

Insbesondere gilt die Gleichung

$$f\left(\widetilde{\gamma}(1)\right) = \gamma(1) = y,$$

so dass y im Bild $f(X)$ liegt. □

(b) Finden Sie ein Beispiel für Abbildung $f\colon X \to Y$, die die Hochhebungseigenschaft für Wege erfüllt, aber *nicht* surjektiv ist.

Lösung. Man betrachtet den diskreten Raum $Y = \{y_0, y_1\}$, den Teilraum $X = \{y_0\}$, und die Inklusion $f\colon \{y_0\} \hookrightarrow \{y_0, y_1\}$. Dann ist f stetig und nicht surjektiv. Lass uns zeigen, dass f die Hochhebungseigenschaft für Wege erfüllt.

Gegeben sei ein Weg $\gamma\colon I \to Y$ und eine Hochhebung des Anfangspunkts, das heißt, $x \in X$ mit $f(x) = \gamma(0)$. Dann ist x unbedingt der einzige Punkt $x = y_0 \in X$, woraus folgt

$$\gamma(0) = f(x) = y_0.$$

Da der Punkt $\{y_0\} \subset Y$ eine Wegkomponente von Y bildet, muss der Weg $\gamma\colon I \to Y$ konstant in y_0 sein, das heißt, es gilt $\gamma(t) = y_0$ für alle $t \in I$. Der konstante Weg $\widetilde{\gamma}\colon I \to X$ in $y_0 \in X$ ist eine Hochhebung von γ mit vorgegebenem Anfangspunkt $\widetilde{\gamma}(0) = y_0 = x$. □

Bemerkung. Das gleiche Argument zeigt allgemeiner, dass eine Inklusion $A \hookrightarrow X$ von Wegkomponenten die eindeutige Hochhebungseigenschaft für Wege erfüllt.

Aufgabe 6. Man bezeichnet

$$L = (\{5\} \times [8,9]) \cup ([5,6] \times \{8\}) \subset \mathbb{R}^2$$

und $p\colon L \to [5,6]$ die Projektion auf die erste Koordinate. Zeigen Sie, dass p die Hochhebungseigenschaft für Wege *nicht* erfüllt.

Lösung. Man betrachtet den Weg $\gamma\colon I \to [5,6]$ mit

$$\gamma(t) = 5 + t.$$

Dann ist der Punkt $(5,9) \in L$ eine Hochhebung des Anfangspunkts von γ, das heißt:

$$p(5,9) = 5 = \gamma(0) \in [5,6].$$

Allerdings gibt es *keine* Hochhebung $\widetilde{\gamma}\colon I \to L$ von γ, die die Bedingung $\widetilde{\gamma}(0) = (5,9)$ erfüllt. Hier ist der Grund dafür. Aus der Gleichung $p\widetilde{\gamma} = \gamma$ folgt

$$\widetilde{\gamma}(t) = (5+t, 8) \in L$$

für alle $t \in (0,1]$, weil p das einzige Urbild $(x,8) \in L$ hat über jedem Punkt $x \in (5,6]$. Aus der Stetigkeit von $\widetilde{\gamma}$ folgt dann

$$\begin{aligned}
\widetilde{\gamma}(0) &= \lim_{t\to 0} \widetilde{\gamma}(t) \\
&= \lim_{t\to 0} (5+t, 8) \\
&= (5,8) \\
&\neq (5,9). \quad \square
\end{aligned}$$