6.132 - Algebraische Topologie
WS 2016/17
Lösungen der Woche 9

Martin Frankland

5.1.2017

Aufgabe 1. Es sei X ein Raum und $X = \sqcup_\alpha U_\alpha$ eine *disjunkte* Vereinigung offener Teilmengen $U_\alpha \subseteq X$. Zeigen Sie, dass X das Koprodukt der U_α ist, das heißt, X ist homöomorph zum Summenraum $\coprod_\alpha U_\alpha$.

Lösung. Sei $A \subseteq X$ eine offene Teilmenge. Für jedes α ist $A \cap U_\alpha$ offen in U_α, woraus folgt, dass $A \subseteq \sqcup_\alpha U_\alpha$ offen ist in der Summentopologie. (Diese Richtung gilt automatisch.)

Umgemehrt sei $A \subseteq \sqcup_\alpha U_\alpha$ offen in der Summentopologie. Dies bedeutet, dass A eine disjunkte Vereinigung dieser Form ist:

$$A = \sqcup_\alpha A_\alpha,$$

mit $A_\alpha \subseteq U_\alpha$ offen in U_α für jedes α. Da $U_\alpha \subseteq X$ offen in X ist, ist wiederum $A_\alpha \subseteq X$ offen in X. Deshalb ist $A \subseteq X$ offen in X, als Vereinigung offener Teilmengen A_α. $\square$

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass die folgenden Bedingungen auf einen Raum X äquivalent sind.

1. X is das Koprodukt seiner Wegkomponenten.
2. Jede Wegkomponente von X ist offen in X.
3. Jeder Punkt $x \in X$ besitzt eine wegzusammenhängende Umgebung.

Hinweis: Auf der Hausaufgabe 1 #4 hatten wir die Implikation (3) $\Rightarrow$ (2) schon gezeigt.

Bemerkung. Insbesondere erfüllt ein CW-Komplex diese Bedingung, und eigentlich viel mehr: jeder Punkt besitzt eine *beliebig kleine zusammenziehbare* offene Umgebung.

Lösung. (3) $\Rightarrow$ (2): Siehe Hausaufgabe 1 #4.

(2) $\Rightarrow$ (1): Da X die disjunkte Vereinigung seiner Wegkomponenten ist, folgt diese Implikation aus Aufgabe 1.

(1) $\Rightarrow$ (3) Jeder Punkt $x \in X$ liegt in seiner Wegkomponente $C_x \subseteq X$, die nach Voraussetzung offen in X ist, also eine offene Umgebung von x ist. $\square$

Aufgabe 3.

(a) Zeigen Sie, dass die Bedindung der Aufgabe 2 die Folgende impliziert: die Wegkomponenten von X stimmen mit dessen Zusammenhangskomponenten überein.

(b) Widerlegen Sie die Umkehrung von (a). Mit anderen Worten: Finden Sie einen Raum X dessen Wegkomponenten und Zusammenhangskomponenten übereinstimmen, wo aber X kein Koprodukt seiner Wegkomponenten ist.

Lösung. **(a)** Sei $X = \coprod_{C \in \pi_0(X)} C$ die Zerlegung von X als Koprodukt seiner Wegkomponenten. Sei $Z \subseteq X$ eine Zusammenhangskomponente von X. Da Z zusammenhängend ist, muss Z in einem Summanden $C \subseteq X$ liegen, d.h., es gilt die Inklusion $Z \subseteq C$. Da Z selber eine Disjunkte Vereinigung mancher Wegkomponente von X ist, gilt die Gleichung $Z = C$. □

(b) Betrachten wir

$$X = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$$

als Teilraum $X \subset \mathbb{R}$. Dann ist jeder einzelne Punkt $\{x\} \subset X$ eine Zusammenhangskomponente von X, insbesondere auch eine Wegkomponente[1] von X.

Allerdings ist der Punkt $\{0\} \subset X$ nicht offen in X, sodass X kein Koprodukt $\coprod_{x \in X} \{x\}$ ist. (Dieses Koprodukt ist übrigens ein diskreter Raum.) □

[1] Jede Wegkomponente liegt in einer Zusammenhangskomponente, die in diesem Beispiel einzelne Punkte sind. Eine nichtleere Teilmenge von $\{x\}$ muss $\{x\}$ selbst sein.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass die folgenden Räume *keine* CW-Komplexe sind.

(a) $X = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ als Teilraum $X \subset \mathbb{R}$.

Lösung. Wie in der Aufgabe 3(b) gezeigt, ist X kein Koprodukt seiner Wegkomponenten, somit kein CW-Komplex. $\square$

(b) Die Sinuskurve des Topologen bzw. der Topologin:

$$X = \{(t, \sin\frac{1}{t} \mid t \in (0,1]\} \cup (\{0\} \times [-1,1])$$

als Teilraum $X \subset \mathbb{R}^2$.

Lösung. Der Raum X besteht aus zwei Wegkomponenten aber nur einer Zusammenhangskomponente. Deshalb ist X kein CW-Komplex, laut Aufgabe 3(a). $\square$

(c) Der hawaiische Ohrring

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n \subset \mathbb{R}^2,$$

wo $C_n \subset \mathbb{R}^2$ den Kreis mit Mittelpunkt $(\frac{1}{n}, 0)$ und Radius $\frac{1}{n}$ bezeichnet.

Lösung. Der Punkt $(0,0) \in X$ hat *keine* einfach zusammenhängende Umgebung (siehe Lemma unten). In einem CW-Komplex hat jeder Punkt beliebig kleine zusammenziehbare Umgebungen, insbesondere mindestens eine einfach zusammenhängende Umgebung. $\square$

Lemma. *Sei* $U \subseteq X$ *eine Umgebung des Punkts* $(0,0) \in X$*. Dann ist die Fundamentalgruppe* $\pi_1(U, (0,0))$ *nicht trivial.*

Beweis. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ besitzt die Inklusion des Kreises $C_n \hookrightarrow X$ eine Retraktion $r_n \colon X \twoheadrightarrow C_n$, nämlich die Abbildung mit $r_n(C_i) = \{(0,0)\}$ für alle $i \neq n$. Anders gesagt bildet r_n die übrigen Kreise C_i konstant auf den Basispunkt $(0,0)$ ab.

Da U einen offenen Ball um $(0,0)$ enthält, gilt die Inklusion $C_m \subseteq U$ für m groß genug. Dann besitzt auch die Inklusion $C_m \hookrightarrow U$ eine Retraktion, nämlich die Einschränkung $r_m|_U \colon U \to C_m$, wie in diesem Diagramm dargestellt:

$$\begin{tikzcd}
C_m \arrow[r, hook] \arrow[rr, bend left, "\mathrm{id}_{C_m}"] \arrow[dr, hook] & X \arrow[r, "r_m"] & C_m \\
& U. \arrow[u, hook] \arrow[ur, "r_m|_U"'] &
\end{tikzcd}$$

Da $\pi_1(C_m, (0,0)) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ nicht trivial ist, kann $\pi_1(U, (0,0))$ nicht trivial sein. $\square$

(d) Der “Kamm”

$$X = [0,1] \times \left(\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \right) \cup (\{0\} \times [0,1])$$

als Teilraum $X \subset \mathbb{R}^2$.

Lösung. Betrachten wir den offenen Ball $V = B\big((\frac{1}{2},0), 0.4\big)$ und eine Umgebung U von $(\frac{1}{2},0)$ mit $U \subseteq V$. Dann ist U *nicht* wegzusammenhängend. In einem CW-Komplex hat jeder Punkt beliebig kleine zusammenziehbare Umgebungen, insbesondere beliebig kleine wegzusammenhängende Umgebungen. □

Bemerkung. Die Räume in Beispielen (a), (b), und (c) sind nicht einmal homotopieäquivalent zu einem CW-Komplex. Beweise dafür findet man zum Beispiel in [1]. Dagegen ist der “Kamm” im Beispiel (d) homotopieäquivalent zu einem CW-Komplex, ja sogar zusammenziehbar.

Aufgabe 5. Sei X ein CW-Komplex, mit einer bestimmten CW-Struktur versehen. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

1. X hat (mindestens) eine Zelle der Dimension $d \geq n$.
2. Es gibt eine Einbettung $D^n \hookrightarrow X$.
3. Es gibt eine Einbettung $\mathbb{R}^n \hookrightarrow X$.

Insbesondere hängt die Dimension von X als CW-Komplex

$$\dim(X) = \sup\{n \mid e^n_\alpha \text{ ist eine Zelle von } X\}$$

nicht von der CW-Struktur ab, sondern nur vom zugrundeliegenden Raum X.

Lösung. Die Äquivalenz (2) $\Leftrightarrow$ (3) hat nichts mit CW-Komplexen zu tun, sondern nur damit, dass sich D^n und $\mathbb{R}^n$ ineinander einbetten lassen.

Die eine Einbettung erhält man nach Definition, denn die n-Kugel $D^n \subset \mathbb{R}^n$ ist ein Teilraum von $\mathbb{R}^n$.

Bezeichnet man mit

$$B^n = B(0,1) = D^n \setminus \partial D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$$

den offenen Einheitsball in $\mathbb{R}^n$. Sei $h\colon \mathbb{R}^n \xrightarrow{\cong} B^n$ ein Homöomorphismus, wie zum Beipiel die Skalierung

$$h(x) = \frac{x}{1 + \|x\|}.$$

Dann ist die Verkettung

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow[\cong]{h} B^n \xhookrightarrow{\text{Inklusion}} D^n$$

eine Einbettung $\mathbb{R}^n \hookrightarrow D^n$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Sei $f\colon D^n \hookrightarrow X$ eine Einbettung. Dann ist die Verkettung $\mathbb{R}^n \hookrightarrow D^n \xrightarrow{f} X$ eine Einbettung.

(3) $\Rightarrow$ (2) Sei $g\colon \mathbb{R}^n \hookrightarrow X$ eine Einbettung. Dann ist die Verkettung $D^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n \xrightarrow{g} X$ eine Einbettung.

(1) ⇒ (3) Gegeben sei eine d-Zelle von X mit charakteristischer Abbildung $\Phi_\alpha \colon D^d \to X_d$. Die Einschränkung

$$B^d \xhookrightarrow{\Phi_\alpha|_{B^d}} X_d$$

ist eine Einbettung in das d-Skelett X_d, mit Bild $\Phi_\alpha(B^d) = e^d_\alpha \subseteq X_d$. Verkettung mit der Inklusion $X_d \subseteq X$ liefert dann eine Einbettung $B^d \hookrightarrow X$. Die Ungleichung $d \geq n$ garantiert, dass es eine Einbettung $B^n \hookrightarrow B^d$ gibt, was durch Verkettung eine Einbettung $B^n \hookrightarrow B^d \hookrightarrow X$ liefert.

(2) ⇒ (1) Sei $f \colon D^n \hookrightarrow X$ eine Einbettung. Wegen Kompaktheit der Kugel D^n ist das Bild $f(D^n) \subseteq X$ wiederum kompakt und liegt somit in einem endlichen Unterkomplex $K \subseteq X$. Anders gesagt faktorisiert $f \colon D^n \hookrightarrow X$ durch die Inklusion $K \subseteq X$, wie in diesem Diagramm dargestellt:

$$\begin{tikzcd}
D^n \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed, "f"'] & X \\
& K. \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

Es sei e^m_α eine Zelle von K der maximalen Dimension $m < \infty$. Dann ist die "offene" Zelle $e^m_\alpha \subseteq K_m$ offen in $K_m = K$. Folglich ist das Urbild $f^{-1}(e^m_\alpha) \subseteq D^n$ offen in D^n (und nichtleer, ohne Beschränkung der Allgemeinheit), sodass $f^{-1}(e^m_\alpha)$ einen kleinen offenen Ball $\widetilde{B}^n \subseteq f^{-1}(e^m_\alpha)$ enthält. Durch Einschränkung bekommt man eine Einbettung

$$\widetilde{B}^n \xhookrightarrow{f|_{\widetilde{B}^n}} e^m_\alpha \cong B^m,$$

was nur dann möglich ist, wenn die Dimensionen die Ungleichung $n \leq m$ erfüllen. □

Aufgabe 6. Man bezeichnet mit M das Möbiusband und $\partial M \subset M$ seinen Rand; siehe Hausaufgabe 3 #2.

(a) Sei $\varphi \colon S^1 \xrightarrow{\cong} \partial M \hookrightarrow M$ die Verkettung der Inklusion $\partial M \hookrightarrow M$ mit einem Homöomorphismus $S^1 \cong \partial M$. Zeigen Sie, dass das Pushout $M \cup_\varphi D^2$ homöomorph ist zur projektiven Ebene $\mathbb{R}P^2$.

Hier entsteht $M \cup_\varphi D^2$ aus M durch Anheften einer 2-Zelle entlang $\varphi \colon S^1 \to M$.

Lösung. Die projektive Ebene ist gegeben (bis auf Homöomorphismus) durch

$$\mathbb{R}P^2 = D^2/x \sim -x \text{ für } x \in \partial D^2.$$

Sei $B \subset D^2$ ein kleiner offener Ball im Inneren der Kreisscheibe, zum Beispiel $B = B(0, \frac{1}{2})$. Man kann B als Teilraum von $\mathbb{R}P^2$ auffassen, weil die Verkettung

$$B \overset{\iota}{\hookrightarrow} D^2 \overset{q}{\twoheadrightarrow} D^2/\sim\, = \mathbb{R}P^2$$

eine Einbettung ist. Der Raum $\mathbb{R}P^2 \setminus B$ hat einen Rand $\partial(\mathbb{R}P^2 \setminus B) \cong S^1$. Durch Anheften einer 2-Zelle entlang des Randes entsteht die projektive Ebene wieder:

$$(\mathbb{R}P^2 \setminus B) \cup_{\partial(\mathbb{R}P^2 \setminus B)} D^2 \cong \mathbb{R}P^2.$$

Folglich genügt es zu zeigen, dass $\mathbb{R}P^2 \setminus B$ homöomorph ist zum Möbiusband M. Diesen Homöomorphismus $\mathbb{R}P^2 \setminus B \cong M$ konstruieren wir unten schrittweise als Verkettung von Homöomorphismen.

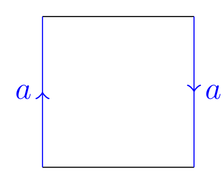

Abbildung 1: Das Möbiusband M.

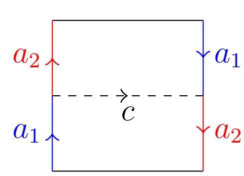

Abbildung 2: Umbenennung.

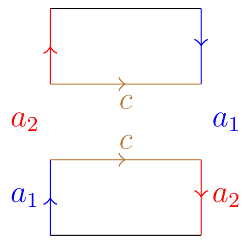

Abbildung 3: Schneiden entlang c.

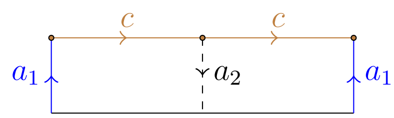

Abbildung 4: Kleben entlang a_2.

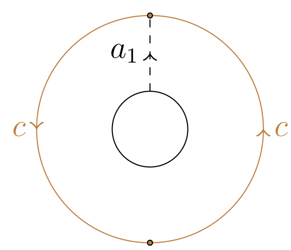

Abbildung 5: Kleben entlang a_1.

Der letzte Schritt ergibt den Raum $\mathbb{R}P^2 \setminus B$. $\square$

(b) Zeigen Sie, dass das Pushout $M \cup_{\partial M} M$ homöomorph ist zur kleinschen Flasche.

Anschaulicher gesagt hat man zwei Möbiusbänder entlang ihrer Ränder miteinander verklebt.

Lösung. Einen Homöomorphismus $M \cup_{\partial M} M \cong K$ konstruieren wir unten schrittweise als Verkettung von Homöomorphismen.

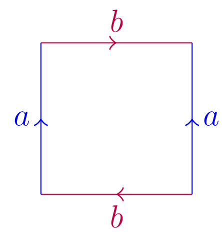

Abbildung 6: Die kleinsche Flasche K.

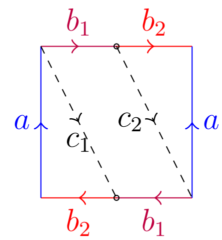

Abbildung 7: Umbenennung.

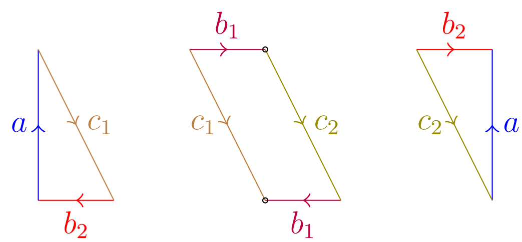

Abbildung 8: Schneiden entlang c_1 und c_2.

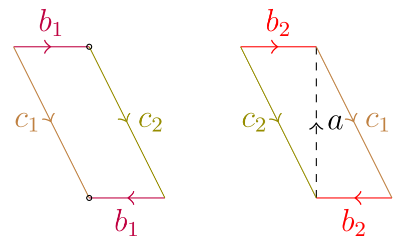

Abbildung 9: Kleben entlang a.

In der Grafik 9 sind beide Räume homöomorph zum Möbiusband M. Ihre Ränder werden beide durch die Schleife $c_1 \bullet c_2$ parametrisiert. Somit ergibt die dargestellte Identifizierung den Raum $M \cup_{\partial M} M$. $\square$

Aufgabe 7. Man bezeichnet mit M_g die orientierbare Fläche vom Geschlecht $g \geq 1$. Zum Beispiel ist $M_1 \cong T^2$ der Torus. Man merke, dass die Fundamentalgruppe $\pi_1(T^2) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ abelsch ist.

Zeigen Sie, dass für jedes $g \geq 2$ die Fundamentalgruppe $\pi_1(M_g)$ *nicht* abelsch ist.

Lösung. Die Fundamentalgruppe $\pi_1(M_g)$ hat die folgende Präsentation mit $2g$ Erzeugern und einer Relation:

$$\pi_1(M_g) \cong \langle a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g \mid [a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g] \rangle \, .$$

Diese Gruppe besitzt als Faktorgruppe

$$\pi_1(M_g)/\{b_1, \ldots, b_g\} \cong \langle a_1, \ldots, a_g \mid 1 \rangle = \langle a_1, \ldots, a_g \rangle \, ,$$

eine freie Gruppe F_g in g Erzeugern. Für jedes $g \geq 2$ ist die freie Gruppe F_g nicht abelsch, woraus folgt, dass $\pi_1(M_g)$ selbst nicht abelsch ist. □

Literatur

[1] Mathematics Stack Exchange, *Is there any example of space not having the homotopy type of a CW-complex?* (Oct. 12, 2013), `http://math.stackexchange.com/questions/523416/`. Accessed Jan. 11, 2017.