6.132 - Algebraische Topologie
WS 2016/17
Seifert–van Kampen und Wegzusammenhang

Martin Frankland

12.12.2016

1 Wegzusammenhängend oder nicht?

Hier ist eine Version des Satzes von Seifert–van Kampen.

Satz 1.1. *Es seien X ein Raum, $U, V \subseteq X$ offene Teilmengen mit $X = U \cup V$, und $x_0 \in U \cap V$ ein Basispunkt. Weiter seien $U \cap V$, U, und V wegzusammenhängend (und daher X auch). Bezeichne man die Inklusionen mit*

$$\begin{tikzcd} U \cap V \arrow[r, "j_V"] \arrow[d, "j_U"'] & V \arrow[d, "\iota_V"] \\ U \arrow[r, "\iota_U"'] & X, \end{tikzcd}$$

dann ist das induzierte Diagramm von Fundamentalgruppen

$$\begin{tikzcd} \pi_1(U \cap V) \arrow[r, "(j_V)_*"] \arrow[d, "(j_U)_*"'] & \pi_1(V) \arrow[d, "(\iota_V)_*"] \\ \pi_1(U) \arrow[r, "(\iota_U)_*"'] & \pi_1(X) \end{tikzcd} \tag{1}$$

ein Pushout von Gruppen.

Viele Quellen nehmen an, dass U und V wegzusammenhängend sind. Wenn man sich den Beweis z.B. von Hatcher näher anschaut, scheint allerdings diese Annahme nicht nötig zu sein[1, Theorem 1.20]. Im Beweis der Surjektivität von

$$\Phi\colon \pi_1(U) * \pi_1(V) \to \pi_1(X)$$

zerlegt man das Intervall $I = [0, 1]$ als

$$0 = s_0 < s_1 < s_2 < \ldots < s_n = 1$$

sodass jedes Stück eines Weges $\gamma\colon I \to X$ vollkommen in U oder in V enthalten ist, das heißt, für jedes i gilt $\gamma([s_i, s_{i+1}]) \subseteq U$ oder $\gamma([s_i, s_{i+1}]) \subseteq V$. Wenn nacheinander stehende Stücke beide in U liegen, das heißt:

$$\begin{cases} \gamma([s_i, s_{i+1}]) \subseteq U \\ \gamma([s_{i+1}, s_{i+2}]) \subseteq U, \end{cases}$$

kann man die zwei Intervalle $[s_i, s_{i+1}]$ und $[s_{i+1}, s_{i+2}]$ vereinigen, indem man den Zerlegungspunkt $s_{i+1} \in I$ entfernt. Anders gesagt braucht man nur Zerlegungspunkte s_i mit $\gamma(s_i) \in U \cap V$.

Ebenso im Beweis der Injektivität von Φ zerlegt man das Quadrat $I \times I$ in kleine Boxen, sodass jedes Stück einer Weghomotopie $H\colon I \times I \to X$ vollkommen in U oder in V enthalten ist, das heißt:

$$H([s_i, s_{i+1}] \times [t_j, t_{j+1}]) \subseteq U \text{ oder } V.$$

Wenn zwei (waagerecht) nacheinander stehende Stücke beide in U liegen, kann man die zugehörigen Boxen $[s_i, s_{i+1}] \times [t_j, t_{j+1}]$ und $[s_{i+1}, s_{i+2}] \times [t_j, t_{j+1}]$ vereinigen. So argumentiert z.B. Strom [2, § 10.1].

Braucht man denn anzunehmen, dass U und V wegzusammenhängend sind? Hier sind Varianten des Satzes 1.1 ohne diese Annahme.

Satz 1.1(b) (Anscheinend stärkere Version)**.** [...] Weiter seien $U \cap V$ und X wegzusammenhängend. [...]

Satz 1.1(c) (Anscheinend stärkste Version)**.** [...] Weiter sei $U \cap V$ wegzusammenhängend. [...]

In der Folge werden wir zeigen, dass *alle drei Versionen 1.1, 1.1(b), und 1.1(c) äquivalent sind.*

2 X mag wegzusammenhängend sein

Nehmen wir jetzt nur an, dass $U \cap V$ wegzusammenhängend ist, wie im Satz 1.1(c). Man bezeichnet mit $X_0 \subseteq X$ die Wegkomponente des Basispunkts $x_0 \in X$, und ebenso $U_0 \subseteq U$ und $V_0 \subseteq V$.

Lemma 2.1. *Es gelten die Inklusionen $U \cap V \subseteq U_0$ und $U \cap V \subseteq V_0$. Insbesondere gilt die Inklusion $U \cap V \subseteq X_0$.*

Beweis. Da $U \cap V$ wegzusammenhängend ist und die Inklusion $U \cap V \subseteq U$ erfüllt, liegt es vollkommen in einer Wegkomponente von U. Nach Voraussetzung enthält $U \cap V$ den Basispunkt $x_0 \in U \cap V$, sodass $U \cap V$ in der Wegkomponente des Basispunkts $U_0 \subseteq U$ liegt. Die Inklusion $U \cap V \subseteq V_0$ folgt analog. □

Wir wissen, dass die Inklusion $X_0 \hookrightarrow X$ einen Isomorphismus $\pi_1(X_0) \xrightarrow{\cong} \pi_1(X)$ induziert. Allgemeiner gilt eine relative Version davon.

Lemma 2.2. *Es sei $A \subseteq X$ ein Teilraum, der den Basispunkt enthält: $x_0 \in A$. Dann induzieren beide Inklusionen $A_0 \hookrightarrow A \cap X_0 \hookrightarrow A$ Isomorphismen*

$$\pi_1(A_0) \xrightarrow{\cong} \pi_1(A \cap X_0) \xrightarrow{\cong} \pi_1(A).$$

Wegen der Gleichung $U \cap V \cap X_0 = U \cap V$ und des Lemmas 2.2 ist das Diagramm von Gruppen (1) isomorph zum Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(U \cap V) \arrow[r, "(j'_V)_*"] \arrow[d, "(j'_U)_*"'] & \pi_1(V \cap X_0) \arrow[d, "(\iota'_V)_*"] \\
\pi_1(U \cap X_0) \arrow[r, "(\iota'_U)_*"'] & \pi_1(X_0).
\end{tikzcd}$$

Darüber hinaus ist $X_0 = (U \cap X_0) \cup (V \cap X_0)$ eine offene Überdeckung von X_0, wo der Schnitt

$$(U \cap X_0) \cap (V \cap X_0) = U \cap V \cap X_0 = U \cap V$$

wegzusammenhängend ist, wie auch X_0 selbst. Dies zeigt, dass Sätze 1.1(b) und 1.1(c) äquivalent sind.

3 U und V mögen wegzusammenhängend sein

Nehmen wir jetzt an, dass $U \cap V$ und X wegzusammenhängend sind, wie im Satz 1.1(b).

Satz 3.1. *U und V sind wegzusammenhängend.*

Beweis. Es genügt, den Fall von U zu behandeln. Es sei $x \in U$ ein beliebiger Punkt. Lass uns zeigen, dass es einen Weg in U gibt zwischen x und dem Basispunkt $x_0 \in U$.

Da X wegzusammenhängend ist, gibt es einen Weg $\gamma\colon I \to X$ von x nach $x_0 \in X$. Falls γ in U liegt, das heißt, durch die Inklusion $U \hookrightarrow X$ faktorisiert, dann sind wir fertig. Andernfalls gibt es ein $s \in I$ mit $\gamma([0,s]) \subseteq U$ und $\gamma(s) \in U \cap V$, *weil U und V offen sind* (und mithilfe vom Lemma 3.2). Die Punkte $x = \gamma(0)$ und $\gamma(s)$ gehören zur selben U-Wegkomponente. Andererseits folgt aus Lemma 2.1

$$\gamma(s) \in U \cap V \subseteq U_0,$$

sodass $\gamma(s)$ zur U-Wegkomponente des Basispunkts $x_0 \in U$ gehört, wie auch x. $\square$

Satz 3.1 zeigt, dass Sätze 1.1 und 1.1(b) äquivalent sind.

Lemma 3.2. *Es sei $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$ eine offene Überdeckung eines Raumes X, und $\gamma\colon I \to X$ ein Weg. Dann gibt es eine Zerlegung des Intervalls*

$$0 = s_0 < s_1 < s_2 < \ldots < s_n = 1$$

wie folgt: Für jedes i gibt es einen Index α_i mit $\gamma([s_i, s_{i+1}]) \subseteq U_{\alpha_i}$.

Jenes Lemma beruht wiederum auf dem Folgenden.

Satz 3.3 (Existenz einer Lebesgue-Zahl)**.** *Es sei K ein kompakter metrischer Raum und $\{U_\alpha\}_\alpha$ eine offene Überdeckung von K. Dann gibt es eine Zahl $\lambda > 0$ sodass jede Teilmenge $A \subseteq K$ mit Durchmesser* $\operatorname{diam}(A) < \lambda$ *in einer U_α enthalten ist.*

*So eine Zahl λ heißt eine **Lebesgue-Zahl** der Überdeckung $\{U_\alpha\}_\alpha$.*

Die Annahme im Satz 3.1, dass U und V offen in X sind, kann nicht pauschal entfernt werden.

Beispiel 3.4. Wir betrachten die Teilräume von $\mathbb{R}^2$

$$U = \{(s,s) \mid s \in [0,1]\} \cup \{(1+s, 1-s) \mid s \in [0,1)\} \cup \{(2+s, s) \mid s \in (0,1]\} \cup \\ \cup \{(3+s, 1-s) \mid s \in [0,1)\}$$

$$V = [0,4] \times \{0\}$$

und $X = U \cup V$, wie in der Grafik 1 dargestellt.

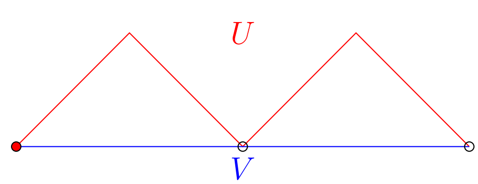

Abbildung 1: Der Raum $X = U \cup V \subset \mathbb{R}^2$.

Dann sind X und $U \cap V = \{(0,0)\}$ wegzusammenhängend. Allerdings ist U *nicht* wegzusammenhängend, weil es keinen Weg in U gibt zwischen $(1,1)$ und $(3,1)$. Zu merken ist, dass weder U noch V offen in X ist.

4 Fazit

Im Satz von Seifert–van Kampen nimmt man üblicherweise an, dass U und V wegzusammenhängend sind (wie im Satz 1.1), obwohl das nicht notwendig ist. Diese Annahme vermindert die Aussagekraft des Satzes nicht, und beschreibt realistischer worum der Satz geht.

Bemerkung 4.1. In manchen Verallgemeinerungen des Satzes mit Gruppoiden spielen die Wegkomponenten der verschiedenen Teilräume eine wichtige Rolle.

Literatur

[1] A. Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002. MR1867354

[2] J. Strom, *Modern classical homotopy theory*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 127, American Mathematical Society, Providence, RI, 2011. MR2839990