

THÉORÈME DE KÜNNETH EN HOMOLOGIE DE MORSE

MARTIN FRANKLAND

RÉSUMÉ. Soit M une variété fermée orientée, et $\Delta \in H_{\dim M}(M \times M)$ la diagonale. Sous l’hypothèse que $H_*(M \times M)$ est naturellement isomorphe à $H_*(M) \otimes H_*(M)$, nous montrons, en utilisant l’homologie de Morse, que la diagonale admet la décomposition de Künneth $\Delta = \sum \bar{b}_i \times b_i$, où $\{b_i\}$ est une base de $H_*(M)$, et $\{\bar{b}_i\}$ est sa base duale par rapport à la forme d’intersection. Bien que ce résultat soit connu, l’approche utilisée est nouvelle.

ABSTRACT. Let M be a closed oriented manifold, and consider the diagonal $\Delta \in H_{\dim M}(M \times M)$. Assuming $H_*(M \times M)$ is naturally isomorphic to $H_*(M) \otimes H_*(M)$, we prove, using a Morse theoretical construction, that the diagonal has the Künneth decomposition $\Delta = \sum \bar{b}_i \times b_i$, where $\{b_i\}$ is a basis of $H_*(M)$, and $\{\bar{b}_i\}$ is its dual basis with respect to the intersection form. Although this is a known result, the approach we take is novel.

1. Introduction

Soit M une variété fermée orientée de dimension m , $[M] \in H_m(M)$ sa classe fondamentale, $d : M \rightarrow M \times M$ l’application diagonale, et $\Delta := d_*([M]) \in H_m(M \times M)$ la classe diagonale. Dans cet article, nous supposons que l’homologie de M est libre, ou sinon nous prenons l’homologie avec coefficients dans un corps. Ainsi, l’isomorphisme de Künneth $H_*(M \times M) \cong H_*(M) \otimes H_*(M)$ est naturel. La diagonale admet une décomposition de Künneth, c’est-à-dire une expression $\Delta = \sum a_i \times b_i$, où $a_i \in H_{k_i}(M)$ et $b_i \in H_{m-k_i}(M)$. Notre but est de trouver une décomposition explicite.

L’idée consiste à déformer la diagonale le long du flot d’une fonction de Morse auto-indexée $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Soit ρ une métrique sur M , et $\{\varphi_t\}$ le flot gradient négatif induit par $-\nabla_\rho f$. Par le flot $id \times \varphi_t$ sur $M \times M$, la diagonale est déformée de façon lisse en le graphe de φ_t , tel qu’illustré à la figure 1. En homologie, nous avons $\Delta = [gr(id_M)] = [gr(\varphi_t)]$. Quand t tend vers l’infini, cette sous-variété s’approche d’un cycle décomposé en produits, dont l’image est

$$(1) \quad \bigcup_{p \in \text{Crit}(f)} \overline{\mathcal{A}_f(p)} \times \overline{\mathcal{D}_f(p)},$$

où l’on note $\mathcal{D}_f(p)$ (ou $\mathcal{A}_f(p)$) la nappe descendante (ou ascendante) ou instable (ou stable, respectivement) d’un point critique p . On trouve un analogue de la formule (1) dans [5].

Reçu le 29 août 2005 et, sous forme définitive, le 27 février 2006.

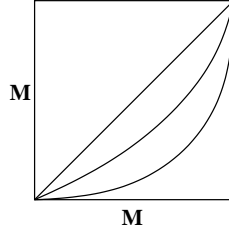


FIGURE 1. Déformation de la diagonale

2. Préliminaires: homologie de Morse

Fixons les notations et rappelons quelques éléments d'homologie de Morse; voir [8] ou [1] pour une exposition de la théorie. Nous choisissons la métrique ρ telle que la paire (f, ρ) soit Morse-Smale. Comme convention d'orientation, on assigne $+1$ aux nappes descendantes de dimension 0, l'orientation de M à celles de dimension m , une orientation quelconque aux autres nappes descendantes, et les nappes ascendantes sont orientées de sorte que l'orientation de $\mathcal{A}(p)$ suivie de celle de $\mathcal{D}(p)$ donne l'orientation de M .

On note $\mathcal{M}(p, q) := (\mathcal{D}(p) \cap \mathcal{A}(q)) / \mathbb{R}$ l'espace de modules des lignes de flot qui descendent de p à q . Lorsque la différence d'indices est 1, $n(p, q) := \#\mathcal{M}(p, q)$ désigne le nombre de lignes de flot comptées avec signes, et 0 dans les autres cas. Nous suivons la convention de signes décrite dans [1]. Soit $C_*(f)$ le complexe de Morse associé à f défini par $C_k(f) := \mathbb{Z}\langle \text{Crit}_k(f) \rangle$, avec la différentielle

$$\partial(p) := \sum_{q \in \text{Crit}(f)} n(p, q) q.$$

Le théorème d'homologie de Morse donne un isomorphisme canonique

$$H_*(C_*(f)) \cong H_*(M).$$

Un survol des preuves les plus standards est donné dans [2, Section 2]. Nous utilisons et résumons ci-après la preuve dans [6], qui établit une équivalence de chaîne-homotopie entre $C_*(f)$ et le complexe singulier (générique) de M , noté $S_*(M)$. Ici, un simplexe est dit *générique* s'il est lisse et ses faces de toutes dimensions intersectent transversalement les nappes ascendantes de tous les points critiques de f . L'inclusion du complexe singulier générique dans le complexe singulier induit un isomorphisme canonique en homologie.

L'équivalence $D_f : C_*(f) \rightarrow S_*(M)$ est définie comme suit. Pour un point critique p , $\mathcal{D}(p)$ admet une compactification naturelle $\overline{\mathcal{D}(p)}$ homéomorphe à un disque, avec une application $e : \overline{\mathcal{D}(p)} \rightarrow M$ qui étend l'inclusion $\mathcal{D}(p) \hookrightarrow M$. Ceci n'est pas prouvé dans [6], mais la section 2.4.6 de [3] donne une preuve pour le cas d'une fonction de Morse auto-indexée, c'est-à-dire dont la valeur $f(p)$ égale l'indice de p pour tout point critique p . Dans ce cas, nous pouvons poursuivre avec la preuve dans [6]. La variété compacte $\overline{\mathcal{D}(p)}$ a un courant fondamental $[\overline{\mathcal{D}(p)}] \in S_{\text{ind}(p)}(\overline{\mathcal{D}(p)})$. On pose

$D_f(p) := e_* \left[\overline{\mathcal{D}(p)} \right]$. Pour la théorie des courants, voir [5]; nous n'en utilisons ici qu'un cas très restreint. L'inverse homotopique $A_f : S_*(M) \rightarrow C_*(f)$ est défini comme suit. Pour un i -simplexe σ , posons

$$A_f(\sigma) := \sum_{p \in \text{Crit}_i(f)} \# \mathcal{M}(\sigma, p) p,$$

où $\mathcal{M}(\sigma, p)$ est l'espace de modules des lignes de flot $\gamma : [0, \infty) \rightarrow M$ allant de σ à p .

Plusieurs constructions homologiques peuvent être faites en homologie de Morse, comme dans [8], particulièrement au chapitre 5. Nous donnons ici une version plus explicite de deux d'entre elles. La dualité de Poincaré se trouve en renversant la fonction f en $-f$. Comme convention, donnons à $\mathcal{D}_{-f}(p)$ l'orientation de $\mathcal{A}_f(p)$. Pour un point critique p d'indice k , nous notons $p_d \in C_k(f)$ sa nappe descendante, et $p_a \in C_{m-k}(-f)$ sa nappe ascendante, vues dans les complexes de Morse. Puis, nous notons $p_D := D_f(p_d) \in S_k(M)$ et $p_A := D_{-f}(p_a) \in S_{m-k}(M)$, les mêmes objets vus comme chaînes singulières. Il y a un isomorphisme canonique (à signe près) $v : C_*(-f) \rightarrow C^*(f)$, donné par

$$v(p_a) = (-1)^{|p_a|} p^d,$$

où p^d est la cochaîne duale à p_d . Ceci induit un isomorphisme en homologie et donc, via le théorème d'homologie de Morse, la dualité de Poincaré.

Le théorème d'Eilenberg-Zilber a aussi son équivalent en homologie de Morse. Soient M et N des variétés de dimensions m et n respectivement, avec des fonctions de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : N \rightarrow \mathbb{R}$.

Définition 2.1. La somme extérieure $f \oplus g : M \times N \rightarrow \mathbb{R}$ de f et g est définie par $(f \oplus g)(x, y) := f(x) + g(y)$.

Cette fonction est aussi Morse-Smale, et ses points critiques sont les paires (x, y) de points critiques de f et g respectivement; l'indice de (x, y) est la somme des indices de x et y . Le flot gradient négatif de $f \oplus g$ est le produit des flots de f et g . Par convention, orientons la nappe descendante $\mathcal{D}_{f \oplus g}(x, y) = \mathcal{D}_f(x) \times \mathcal{D}_g(y)$ en prenant l'orientation de $\mathcal{D}_f(x)$ suivie de celle de $\mathcal{D}_g(y)$. Avec nos conventions de signes, il y a un isomorphisme canonique $\Phi : C_*(f) \otimes C_*(g) \rightarrow C_*(f \oplus g)$ donné par

$$\Phi(x \otimes y) := (x, y).$$

C'est l'équivalent en homologie de Morse du théorème d'Eilenberg-Zilber, selon lequel le produit croisé $\times : S_*(M) \otimes S_*(N) \rightarrow S_*(M \times N)$ est une équivalence d'homotopie naturelle, avec inverse homotopique θ . Cet isomorphisme Φ est naturel, par la naturalité du produit croisé et des morphismes d'homologie de Morse, et le fait que le diagramme

$$(2) \quad \begin{array}{ccc} S_*(M) \otimes S_*(N) & \xrightleftharpoons[\theta]{\times} & S_*(M \times N) \\ A_f \otimes A_g \updownarrow D_f \otimes D_g & & A_{f \oplus g} \updownarrow D_{f \oplus g} \\ C_*(f) \otimes C_*(g) & \xrightleftharpoons[\Phi^{-1}]{\Phi} & C_*(f \oplus g) \end{array}$$

commute dans les deux directions, c'est-à-dire que $\times \circ (D_f \otimes D_g) = D_{f \oplus g} \circ \Phi$, et aussi $A_{f \oplus g} \circ \times = \Phi \circ (A_f \otimes A_g)$. Autrement dit, nous pouvons écrire $(p, q)_D = p_D \times q_D$. Par

convention, le produit des morphismes de complexes δ et η est défini par

$$(\delta \otimes \eta)(a \otimes b) := (-1)^{|\delta||b|} \delta(a) \otimes \eta(b),$$

où la dimension de δ est son degré.

3. Application à la diagonale

Pour tout temps t , la diagonale est homologue au graphe de φ_t^f ainsi qu'au cycle $\left((\varphi_{-t}^f \times \varphi_t^f) \circ d \right)_* ([M])$. Or, le difféomorphisme $\varphi_{-t}^f \times \varphi_t^f$ est le flot $\varphi_t^{-f \oplus f}$ de la fonction $-f \oplus f$ sur $M \times M$. En lui appliquant le théorème d'homologie de Morse, nous obtenons la limite du cycle. Un calcul simple donne

$$A_{-f \oplus f}(\Delta) = \sum_{p \in \text{Crit}(f)} (p, p) \in C_*(-f \oplus f).$$

Puisque Δ est homologue à $D_{-f \oplus f} \circ A_{-f \oplus f}(\Delta)$, nous obtenons le résultat suivant.

Proposition 3.1. *Avec les notations précédentes,*

$$\Delta = \left[\sum_{p \in \text{Crit}(f)} p_A \times p_D \right].$$

C'est une décomposition de la diagonale au niveau des chaînes, mais pas en homologie, puisqu'en général, les nappes ascendantes et descendantes ne sont pas des cycles.

Exemple 3.2. Prenons $M = S^1$. Soient $\{a_1, \dots, a_k\}$ l'ensemble des points critiques de f d'indice 1, et $\{b_1, \dots, b_k\}$ ceux d'indice 0. Tel qu'illustré à la figure 2, nous pouvons ordonner les points critiques pour que la différentielle soit $\partial a_{i,d} = b_{i,d} - b_{i-1,d}$, et donc pour que la différentielle pour $-f$ soit donnée par $\partial b_{i,a} = a_{i+1,a} - a_{i,a}$.

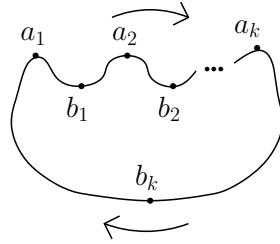


FIGURE 2. Fonction de Morse sur le cercle

En vertu de la proposition 3.1, la diagonale est égale à

$$\left[\sum_{i=1}^k a_{iA} \times a_{iD} + \sum_{j=1}^k b_{jA} \times b_{jD} \right].$$

Ceci est homologue à $a_{1A} \times (\sum_{i=1}^k a_{iD}) + (\sum_{j=1}^k b_{jA}) \times b_{1D}$, qui est égal à $[pt] \times [M] + [M] \times [pt]$. Notons que $[pt] \in H_0(M)$ et $[M] \in H_1(M)$ sont duaux l'un à l'autre par rapport au nombre d'intersection.

4. Calculs et forme d'intersection

Dans cette section, nous trouvons une décomposition de Künneth de la diagonale à partir de la décomposition de la proposition 3.1.

Rappelons que pour des complexes de chaînes C_* et D_* , avec C_* libre, il y a un isomorphisme canonique $\phi : C^* \otimes D_* \rightarrow \text{Hom}(C_*, D_*)$ défini par

$$\phi(\alpha \otimes a) := (-1)^{|\alpha||a|} \alpha(\cdot) a.$$

Son inverse ϕ^{-1} est donné par

$$\phi^{-1}(f) = \sum_i (-1)^{|b^i||f(b_i)|} b^i \otimes f(b_i),$$

où $\{b_i\}$ est une base de C_* . Ici, le complexe dual C^* est gradué par le degré des morphismes, c'est-à-dire $(C^*)_{-k} = \text{Hom}(C_k, \mathbb{Z})$. Donc le complexe dual de $C_*(f)$ est gradué de $-m$ à 0. Désormais, notons $C^*(f)$ le complexe gradué de $-m$ à 0, et $\hat{C}^*(f)$ le même complexe gradué de 0 à m . Le changement de graduation est l'isomorphisme $\pi : \hat{C}^*(f) \rightarrow C^*(f)$ défini par $\pi(\alpha) = (-1)^{m|\alpha|} \alpha$.

Proposition 4.1. *Soit $\hat{\Delta} \in S_m(M \times M)$ une chaîne représentant la diagonale Δ . Alors les morphismes suivants envoient $\hat{\Delta}$ sur $id_{C_*(f)}$:*

$$(3) \quad S_m(M \times M) \xrightarrow{A_{-f \oplus f}} C_*(-f \oplus f) \xrightarrow{\Phi^{-1}} C_*(-f) \otimes C_*(f) \longrightarrow \\ \xrightarrow{v \otimes id} \hat{C}^*(f) \otimes C_*(f) \xrightarrow{\pi \otimes id} C^*(f) \otimes C_*(f) \xrightarrow{\phi} \text{Hom}(C_*(f), C_*(f)).$$

Notons V' le dual d'un module V . Puisque $H_{k-1}(C_*)$ est libre, l'application évaluation $\beta : H^k(C^*) \rightarrow H_k(C_*)'$ est un isomorphisme canonique.

Proposition 4.2. *Soient C_* et D_* des complexes, avec C_* et $H_*(C_*)$ libres. Considérons les isomorphismes suivants:*

$$(4) \quad H_*(\text{Hom}(C_*, D_*)) \xrightarrow{\phi_*^{-1}} H_*(C^* \otimes D_*) \xrightarrow{K} H_*(C^*) \otimes H_*(D_*) \longrightarrow \\ \xrightarrow{\beta \otimes id} H_*(C_*)' \otimes H_*(D_*) \xrightarrow{\phi} \text{Hom}(H_*(C_*), H_*(D_*)),$$

où K est l'isomorphisme de Künneth. Alors l'image de $[h] \in H_*(\text{Hom}(C_*, D_*))$ est $h_* := H_*(h)$.

Lorsque D_* est égal à C_* , la classe de id_{C_*} est envoyée sur $id_{H_*(C_*)}$. Partant de l'identité aux deux bouts de cette suite de morphismes, nous obtenons une décomposition de Künneth explicite:

$$(5) \quad \left[\sum_i (-1)^{|c_i|} c^i \otimes c_i \right] \xrightarrow{K} \sum_j (-1)^{|e_j|} [e^j] \otimes [e_j],$$

où $\{c_i\}$ est une base de C_* et $\{[e_j]\}$ est une base de $H_*(C_*)$. L'isomorphisme de Künneth est naturel, donc le diagramme suivant commute:

$$(6) \quad \begin{array}{ccc} H_*(C_*(-f) \otimes C_*(f)) & \xrightarrow{K} & H_*(C_*(-f)) \otimes H_*(C_*(f)) \\ \downarrow (v \otimes id)_* & & \downarrow v_* \otimes id_* \\ H_*(\hat{C}^*(f) \otimes C_*(f)) & \xrightarrow{K} & H_*(\hat{C}^*(f)) \otimes H_*(C_*(f)) \\ \downarrow (\pi \otimes id)_* & & \downarrow \pi_* \otimes id_* \\ H_*(C^*(f) \otimes C_*(f)) & \xrightarrow{K} & H_*(C^*(f)) \otimes H_*(C_*(f)). \end{array}$$

Partant du produit de Kronecker $H_*(C^*(f)) \otimes H_*(C_*(f)) \rightarrow \mathbb{Z}$, ce diagramme induit un produit $\chi : H_*(C_*(-f)) \otimes H_*(C_*(f)) \rightarrow \mathbb{Z}$ et donne une décomposition de Künneth de la diagonale en homologie de Morse:

$$\left[\sum_{p \in \text{Crit}(f)} p_a \otimes p_d \right] \xrightarrow{K} \sum_i (-1)^{|b_i|} \bar{b}_i \otimes b_i,$$

où $\{\bar{b}_i\}$ est la base duale de $\{b_i\}$ par rapport au produit χ . Cette décomposition peut se traduire en homologie singulière avec le diagramme commutatif

$$(7) \quad \begin{array}{ccccc} H_*(S_*(M \times M)) & \xrightarrow{\theta_*} & H_*(S_*(M) \otimes S_*(M)) & \xrightarrow{K} & H_*(S_*(M)) \otimes H_*(S_*(M)) \\ \downarrow A_{-f \oplus f_*} & & \downarrow (A_{-f} \otimes A_f)_* & & \downarrow A_{-f_*} \otimes A_{f_*} \\ H_*(C_*(-f \oplus f)) & \xrightarrow{\Phi_*^{-1}} & H_*(C_*(-f) \otimes C_*(f)) & \xrightarrow{K} & H_*(C_*(-f)) \otimes H_*(C_*(f)). \end{array}$$

Ici, le produit χ induit un produit $I : H_*(S_*(M)) \otimes H_*(S_*(M)) \rightarrow \mathbb{Z}$, qui est le nombre d'intersections à signe près: pour des cycles σ et τ , nous avons la relation

$$I(\sigma \otimes \tau) = (-1)^{|\tau|} \#(\sigma, \tau).$$

Le signe d'un point d'intersection est défini en prenant l'orientation de σ suivie de celle de τ ; ce nombre est défini comme zéro pour des cycles qui ne sont pas de dimensions complémentaires dans M .

Le nombre d'intersections est un cas particulier, en dimensions complémentaires, de la forme d'intersection $\bullet : H_i(M) \otimes H_j(M) \rightarrow H_{i+j-m}(M)$, définie comme duale du cup-produit; voir par exemple [4, Chapitre 6.11]. Avec l'identification canonique $H_0(M) \cong \mathbb{Z}$, nous obtenons le résultat suivant.

Théorème 4.3. Soient $\{b_i\}$ une base de $H_*(M)$, et $\{\bar{b}_i\}$ sa base duale par rapport à la forme d'intersection, c'est-à-dire $\bar{b}_i \bullet b_j = \delta_{ij}$. La diagonale admet la décomposition de Künneth

$$\Delta = \sum_i \bar{b}_i \times b_i.$$

5. Conclusion

Le résultat principal de cet article est le théorème 4.3. Ce n'est pas un résultat nouveau; voir par exemple [7, Chapitre 11]. Nous avons utilisé une nouvelle méthode

basée sur la théorie de Morse, qui permet d'obtenir un objet singulier (sous-variété par morceaux) comme limite d'objets lisses (graphe de φ_t). Nous avons aussi donné une nouvelle preuve de la naturalité du produit en homologie de Morse.

Une décomposition de Künneth de la diagonale donne ainsi une décomposition de n'importe quel graphe. En effet, si $f : M \rightarrow N$ est continue, et $\Delta_M = \sum a_i \times b_i$ est une décomposition de la diagonale de M , alors le graphe de f se décompose comme

$$[gr(f)] = \sum_i a_i \times f_*(b_i) \in H_m(M \times N).$$

Ceci permet notamment de prouver le théorème des points fixes de Lefschetz pour une variété. En effet, l'indice total des points fixes d'une application $f : M \rightarrow M$ est égal au nombre d'intersection $\Delta \bullet [gr(f)]$. Utilisant le théorème 4.3, un calcul simple montre que ce nombre est égal au nombre de Lefschetz de f .

Pour approfondir cette recherche, on pourrait étudier le cas où $H_*(M)$ n'est pas libre. Alors, les propositions 3.1 et 4.1 demeurent valides, contrairement aux manipulations algébriques de la section précédente.

Remerciements. Mémoire de maîtrise sous la direction de François Lalonde, et financé par le Conseil de recherche en sciences naturelles et génie du Canada.

English extended abstract

Let M be a closed oriented manifold of dimension m and $\Delta \in H_m(M \times M)$ be the diagonal class. We assume that the homology of M is free, or else we take homology with coefficients in a field. So the Künneth isomorphism $H_*(M \times M) \cong H_*(M) \otimes H_*(M)$ is natural. Our goal is to give an explicit Künneth decomposition of the diagonal.

The idea is to deform the diagonal along the negative gradient flow $\{\varphi_t\}$ of a self-indexing Morse function $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Using the flow $id \times \varphi_t$ on $M \times M$, the diagonal is smoothly deformed into the graph of φ_t , as shown in Figure 1. As t goes to infinity, this submanifold gets closer to a cycle which is decomposed into products. Its image is (1), where $\mathcal{D}_f(p)$ (or $\mathcal{A}_f(p)$) denotes the descending (or ascending) or unstable (or stable, respectively) manifold of a critical point p . An analog of formula (1) can be found in [5].

The Morse homology theorem gives a canonical isomorphism $H_*(C_*(f)) \cong H_*(M)$. We use the proof in [6], completed by [3], which establishes a chain-homotopy equivalence $D_f : C_*(f) \rightarrow S_*(M)$ between the Morse complex and the (generic) singular chain complex of M . Basically, this map associates to a critical point its descending manifold. We denote its homotopic inverse by A_f .

We use two Morse homological constructions which are done more thoroughly in [8], Chapter 5. For a critical point p of index k , we denote by $p_d \in C_k(f)$ its descending manifold, $p_a \in C_{m-k}(-f)$ its ascending manifold, viewed in the Morse complexes, and by $p_D := D_f(p_d) \in S_k(M)$ and $p_A := D_{-f}(p_a) \in S_{m-k}(M)$ the same manifolds viewed as chains. Poincaré's duality is induced by the canonical (up to sign) isomorphism $v : C_*(-f) \rightarrow C^*(f)$, given by $v(p_a) = (-1)^{|p_a|} p^d$, where p^d is the cochain dual to p_d .

The Eilenberg-Zilber theorem is induced by the isomorphism $\Phi : C_*(f) \otimes C_*(g) \rightarrow C_*(f \oplus g)$ given by $\Phi(x \otimes y) := (x, y)$. The isomorphism Φ is natural, by the naturality of the cross product and the Morse chain morphisms, and the fact that the diagram (2) commutes in both directions, that is $\times \circ (D_f \otimes D_g) = D_{f \boxplus g} \circ \Phi$ and $A_{f \oplus g} \circ \times = \Phi \circ (A_f \otimes A_g)$. Then we can write $(p, q)_D = p_D \times q_D$.

Proposition. *With the notations above,*

$$\Delta = \left[\sum_{p \in \text{Crit}(f)} p_A \times p_D \right].$$

Proof. A simple computation yields

$$A_{-f \oplus f}(\Delta) = \sum_{p \in \text{Crit}(f)} (p, p) \in C_*(-f \oplus f).$$

Now Δ is homologous to $D_{-f \oplus f} \circ A_{-f \oplus f}(\Delta)$, whence the result follows. \square

Starting from this decomposition at the chain level, we compute a Künneth decomposition using basic homological algebra. From here on, let $C^*(f)$ denote the dual complex graded from $-m$ to 0 , and $\hat{C}^*(f)$ be the same complex graded from 0 to m , with isomorphism $\pi : \hat{C}^*(f) \rightarrow C^*(f)$.

Proposition. *Let $\hat{\Delta} \in S_m(M \times M)$ be a chain in the diagonal class Δ . The morphisms (3) map $\hat{\Delta}$ onto $id_{C_*(f)}$.*

Proposition. *Let C_* and D_* be chain complexes, with C_* and $H_*(C_*)$ free. The isomorphisms (4) map $[h] \in H_*(\text{Hom}(C_*, D_*))$ onto $h_* := H_*(h)$.*

Corollary. *The identity yields the explicit Künneth decomposition (5), where $\{c_i\}$ is a basis of C_* and $\{[e_j]\}$ is a basis of $H_*(C_*)$.*

This decomposition is translated into Morse homology using diagram (6), then to singular homology using diagram (7), which yields the following.

Theorem. *Let $\{b_i\}$ be a basis of $H_*(M)$, and $\{\bar{b}_i\}$ its dual basis with respect to the intersection form, that is $\bar{b}_i \bullet b_j = \delta_{ij}$. The diagonal has the Künneth decomposition*

$$\Delta = \sum_i \bar{b}_i \times b_i.$$

This is not a new result; see for instance [7, Chapter 11]. Our proof using Morse theory is new though. We have also given a new proof that the product in Morse homology is natural.

RÉFÉRENCES

- [1] A. Banyaga et D. Hurtubise, *Lectures on Morse homology*, Kluwer Texts in the Mathematical Sciences, **29**, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 2004. x+324 pp.
- [2] J.-F. Barraud et O. Cornea, *Homotopic dynamics in symplectic topology*, Morse theoretic methods in nonlinear analysis and in symplectic topology, 109–148, NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem., **217**, Springer, Dordrecht, 2006.

- [3] J.-F. Barraud et O. Cornea, *Lagrangian intersections and the Serre spectral sequence*, Ann. of Math. (2) **166** (2007), no. 3, 657–722.
- [4] G. E. Bredon, *Topology and geometry*, Corrected third printing of the 1993 original. Graduate Texts in Mathematics, **139**, Springer-Verlag, New York, 1997. xiv+557 pp.
- [5] F. R. Harvey et H. B. Lawson Jr., *Finite volume flows and Morse theory*, Ann. of Math. (2) **153** (2001), no. 1, 1–25.
- [6] M. Hutchings, *Lecture notes on Morse homology*, <http://math.berkeley.edu/~hutching>, 2002.
- [7] J. W. Milnor et J. D. Stasheff, *Characteristic classes*, Annals of Mathematics Studies, **76**, Princeton University Press, Princeton, N. J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1974. vii+331 pp.
- [8] M. Schwarz, *Morse homology*, Progress in Mathematics, **111**, Birkhäuser Verlag, Basel, 1993. x+235 pp.

M. FRANKLAND, DÉP. DE MATHÉMATIQUES ET DE STATISTIQUE, U. DE MONTRÉAL, CP 6128,
SUCC. CENTRE-VILLE, MONTREAL, QUEBEC, H3C 3J7, CANADA
martin.frankland@gmail.com