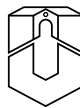


Vorlesungen zur Theoretischen Physik

Methode der Finiten Elemente

Peter Hertel



Universität Osnabrück

Partielle Differentialgleichungen spielen eine überragende Rolle in Physik und Technik. Nur in hochsymmetrischen Fällen gibt es analytische Lösungen, fast immer ist man auf numerische Verfahren angewiesen. In letzter Zeit setzt sich die Methode der Finiten Elemente (FEM, *finite element method*) immer mehr durch.

Wir leiten die Methode her, indem die partielle Differentialgleichung in ihre schwache Form überführt wird. Man ersetzt den vollen Hilbertraum durch einen endlichdimensionalen Teilraum aus handhabbaren Entwicklungsfunktionen (Galerkin-Methode), und aus der partiellen Differentialgleichung wird ein endliches System linearer Gleichungen.

Überzieht man das Grundgebiet, auf dem die partielle Differentialgleichung zu lösen ist, mit einer Triangulation, dann bieten sich so genannte Zeltfunktionen an. Solche Entwicklungsfunktionen haben den Wert 1 an einem Knoten, sind linear in jedem angrenzenden Simplex und verschwinden außerhalb. Das Integral über das Grundgebiet wird zu einer Summe über solche Simplexes, oder finite Elemente. Der Koeffizient vor jeder Zeltfunktion ist zugleich der Funktionswert an dem betreffenden Knoten.

Wir demonstrieren die Methode der Finiten Elemente mithilfe eines Software-Paketes, das auf MATLAB aufsetzt.

15.01.2005

1	Überblick	3
2	Grundlagen	4
2.1	Die Aufgabe	4
2.2	Schwache Form des Problems	4
2.3	Galerkin-Näherung	5
2.4	Finite Elemente	6
2.5	Auswertung der Integrale	7
3	Einfache Beispiele	9
3.1	Elektrostatik	9
3.2	Magnetostatik	9
3.3	Gleichstrom	10
4	Erweiterungen	11
4.1	Elliptisches System	11
4.2	Parabolische und hyperbolische Gleichung	11
4.3	Eigenwertproblem	13
4.4	Nichtlineare Probleme	14
5	Mehr Beispiele	15
5.1	Elastizitätstheorie	15
5.2	Wärmeleitung	17
5.3	Eigenschwingungen einer Membran	18
5.4	Minimale Flächen	19

1 Überblick

Die mathematisch geprägten Naturwissenschaften formulieren Gesetzmäßigkeiten als Regeln für Veränderungen. Wenn der Zugewinn pro Zeiteinheit proportional zum Vorhandenen ist, dann führt das auf eine Differentialgleichung

$$\dot{u} = \alpha u \quad . \quad (1)$$

Das ist eine gewöhnliche Differentialgleichung für eine Funktion $u = u(t)$.

In der Physik und in benachbarten Naturwissenschaften hat man es oft mit Feldern $u = u(t, \mathbf{x})$ zu tun. Die Feldwerte hängen nicht nur von der Zeit t ab, sondern von der Position \mathbf{x} im Raum ab. Die von Ort zu Ort veränderliche Temperatur $T = T(t, \mathbf{x})$ ist ein gutes Beispiel.

Die Gesetzmäßigkeiten für Felder sind ebenfalls Differentialgleichungen. Allerdings sind nun die partiellen Ableitungen nach mehreren Variablen im Spiel, daher hat man es mit partiellen Differentialgleichungen zu tun. Beispielsweise wird die Wärmeleitung recht gut durch

$$\partial_t T = \kappa \Delta T \quad (2)$$

beschrieben. $\Delta = \partial_j \partial_j$ steht für den Laplace-Operator, also $\partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2$. κ ist die vom Material abhängige Temperaturleitfähigkeit. Dort wo das Temperaturfeld eine positive Krümmung hat, muß die Temperatur steigen. Und weil alle Richtungen des Raumes gleich gut sind, kann die Krümmung nur mit Δ bewertet werden.

Solche und ähnliche partielle Differentialgleichung erörtern wir hier.

Seit geraumer Zeit verdrängt die Methode der finiten Elemente fast alle anderen Lösungsverfahren. Das liegt vor allem daran, daß es leistungsfähige und benutzerfreundliche Programmpakete gibt, die dem Anwender die Programmierung im kleinen abnehmen. Wir erklären hier die Methode der finiten Elemente anhand der `PDE-Toolbox` für `MATLAB`[®]. Das Paket ist auf zwar auf zweidimensionale Probleme beschränkt¹, aber einfach zu handhaben.

¹mehr können Rechner der Workstation-Klasse ohnehin nicht bewältigen

2 Grundlagen

Wir beschreiben in diesem Abschnitt, wie man mit Hilfe der Methode der finiten Elemente eine partielle Differentialgleichung aus einer bestimmten Klasse löst. Dafür wird zuerst das Problem formuliert und in eine andere Form überführt. Indem man einen unendlich-dimensionalen Raum von möglichen Lösungen und Testfunktionen durch einen endlichdimensionalen ersetzt, entsteht ein lineares Gleichungssystem. Die Methode der finiten Elemente arbeitet mit einer Basis aus lokalisierten Funktionen.

Dieser Text lehnt sich eng an das Handbuch zur PDE-Toolbox für MATLAB an.

2.1 Die Aufgabe

Wir behandeln die Klasse

$$-\nabla c \nabla u + a u = f \quad (3)$$

von elliptischen partiellen Differentialgleichungen.

$u = u(x, y)$ ist die gesuchte Funktion. Die Gleichung ist im Inneren eines beschränkten Gebietes Ω der x, y -Ebene zu lösen. $\nabla = (\partial_x, \partial_y)$ ist der Nabla-Operator in zwei Dimensionen. c, a und f sind komplexwertige Funktionen $\Omega \rightarrow \mathbb{C}$, ebenso wie u .

Auf dem Rand $\partial\Omega$ soll die Bedingung

$$\mathbf{n} c \nabla u + q u = g \quad (4)$$

erfüllt werden. \mathbf{n} ist der nach außen zeigende Normalenvektor. Die Funktionen q und g sind auf dem Rand vorgegeben.

Läßt man den ersten Term in (4) weg, dann spricht man von einer *Dirichlet*-Randbedingung. Im Falle $q = 0$ ist die Bezeichnung *von Neumann*-Randbedingung gebräuchlich.

2.2 Schwache Form des Problems

Wir wählen irgendeine Testfunktion $v : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Mit $d\Omega = dx dy$ formen wir (3) um in

$$-\int_{\Omega} d\Omega v \nabla c \nabla u + \int_{\Omega} d\Omega v a u = \int_{\Omega} d\Omega v f . \quad (5)$$

Durch partielle Integration wird daraus

$$-\int_{\partial\Omega} ds \mathbf{n} v c \nabla u + \int_{\Omega} d\Omega (\nabla v) c (\nabla u) + \int_{\Omega} d\Omega v a u = \int_{\Omega} d\Omega v f . \quad (6)$$

In das Integral über den Rand setzen wir die Bedingung (4) ein:

$$\int_{\Omega} d\Omega (\nabla v) c (\nabla u) + \int_{\Omega} d\Omega v a u + \int_{\partial\Omega} ds v q u = \int_{\partial\Omega} ds v g + \int_{\Omega} d\Omega v f . \quad (7)$$

Die ursprüngliche Aufgabe heißt nun: finde eine Funktion u so daß (7) für alle Testfunktionen v gilt.

2.3 Galerkin-Näherung

Auf Galerkin² geht die folgende Näherung zurück. Anstatt alle möglichen potentiellen Lösungen u und alle Testfunktion v in Betracht zu ziehen, beschränke man sich auf einen n -dimensionalen linearen Raum \mathcal{L}_n . Es läßt sich zeigen, daß die Lösung der Aufgabe (7) für $u, v \in \mathcal{L}_n$ der wirklichen Lösung des Problems (7) am nächsten kommt, in einer bestimmten Norm, auf die wir später zu sprechen kommen.

Wir wählen eine Basis $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ für \mathcal{L}_n . (7) ist für $v = \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ zu erfüllen. Mit

$$u(x, y) = \sum_{j=1}^n U_j \phi_j(x, y) \quad (8)$$

erhalten wir das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\sum_{j=1}^n K_{ij} U_j = F_i . \quad (9)$$

Dabei ist die Matrix K durch

$$K_{ij} = \int_{\Omega} d\Omega (\nabla \phi_i) c (\nabla \phi_j) + \int_{\Omega} d\Omega \phi_i a \phi_j + \int_{\partial\Omega} ds \phi_i q \phi_j \quad (10)$$

definiert und der Vektor F auf der rechten Seite als

$$F_i = \int_{\partial\Omega} ds \phi_i g + \int_{\Omega} d\Omega \phi_i f . \quad (11)$$

²russischer Mathematiker, sprich: Galjórkin

Häufig gilt $c > 0$, $a \geq 0$ und $q \geq 0$. In diesem Falle ist K eine positive Matrix, und

$$\|w\|^2 = \int_{\Omega} d\Omega \{c|\nabla w|^2 + a|w|^2\} + \int_{\partial\Omega} ds q|w|^2 \quad (12)$$

ist eine Norm. In dieser Norm ist die Galerkin-Näherung optimal.

2.4 Finite Elemente

Wir zerlegen das Gebiet Ω in endliche Stücke, die man deswegen finite Elemente nennt. Im folgenden wird die einfachste von vielen Möglichkeiten vorgestellt: Dreiecke und lineare Funktionen.

Die Eckpunkte der Dreiecke heißen Knoten. Die meisten Knoten sind an mehreren Dreiecken beteiligt.

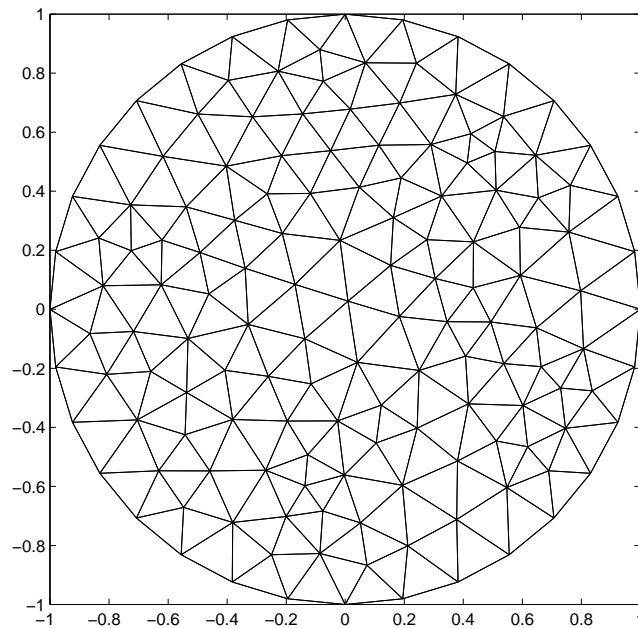


Abbildung 1: Maschennetz für ein kreisförmiges Gebiet. Das Netz besteht aus 254 Dreiecken mit 144 Knoten, der Rand aus 32 Kanten.

Die Knoten $p_i = (x_i, y_i)$ nummerieren wir mit $i = 1, 2, \dots, n$ durch. Zu jedem Knoten gehört eine Basisfunktion ϕ_i , die wir folgendermaßen konstruieren: ϕ_i soll stetig und stückweise linear sein, an allen Knoten bis auf p_i verschwinden, wo sie den Wert 1 hat (Zeltfunktion).

Wegen $\phi_j(x_i, y_i) = \delta_{ji}$ gilt

$$u(x_i, y_i) = \sum_j U_j \phi_j(x_i, y_i) = U_i . \quad (13)$$

Die Koeffizienten U_i sind also die Werte der Funktion u an den entsprechenden Knoten.

Die Gebietsintegrale sind Summen über die Dreiecke der Triangulation, und die Randintegrale Summen über die Kanten des Randes.

2.5 Auswertung der Integrale

Wir betrachten ein typisches Dreieck A mit den Knoten p_1, p_2 und p_3 . Der Weg von p_1 nach p_2 nach p_3 nach p_1 soll rechtshändig orientiert sein.

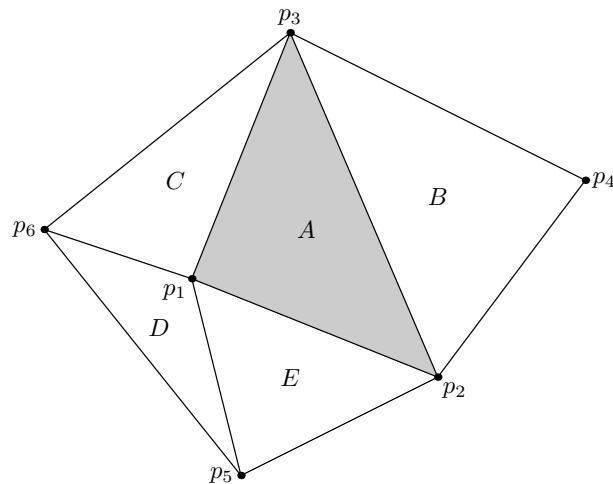


Abbildung 2: Ausschnitt aus einem Maschennetz

Die Fläche dieses Dreieckes beträgt Δ , mit

$$2\Delta = x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_1y_3 - x_2y_1 - x_3y_2 . \quad (14)$$

Das kommt heraus, wenn man $(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)$ ausmultipliziert, oder eine Permutation $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ davon.

Wir schreiben

$$s_1(x, y) = \frac{(y_2 - y_3)(x - x_3) + (x_3 - x_2)(y - y_3)}{2\Delta} . \quad (15)$$

s_1 hat den Wert 1 bei p_1 und verschwindet bei p_2 und p_3 . Da die Funktion zudem linear in x und y ist, stellt sie die Zeltfunktion $\phi_1(x, y)$ im betrachteten Dreieck A dar. Man beachte, daß die Zeltfunktion ϕ_1 auch in den Dreiecken C , D und E positive Werte hat. Im Dreieck B jedoch und anderswo verschwindet ϕ_1 .

Die entsprechenden Permutationen der Indizes ergeben die Zeltfunktionen ϕ_2 und ϕ_3 in A . Alle anderen Zeltfunktionen verschwinden im Dreieck A .

Im Dreieck A hat ϕ_1 die (örtlich konstanten) partiellen Ableitungen

$$\partial_x \phi_1 = \frac{y_2 - y_3}{2\Delta} \quad (16)$$

und

$$\partial_y \phi_1 = \frac{x_3 - x_2}{2\Delta} \quad (17)$$

Die entsprechenden Ausdrücke für ϕ_2 und ϕ_3 gewinnt man durch zyklisches Vertauschen der Indizes.

Zu K_{11} trägt damit das Integral $\int d\Omega \phi_1 c \phi_1$ über A mit

$$\bar{c} \left\{ \left(\frac{y_2 - y_3}{2\Delta} \right)^2 + \left(\frac{x_3 - x_2}{2\Delta} \right)^2 \right\} \Delta \quad (18)$$

bei. Dabei ist \bar{c} der Wert der Funktion $c = c(x, y)$ am Mittelpunkt (Schwerpunkt) des Dreieckes. Der Beitrag zu K_{12} ist

$$\bar{c} \left\{ \frac{y_2 - y_3}{2\Delta} \frac{y_3 - y_1}{2\Delta} + \frac{x_3 - x_2}{2\Delta} \frac{x_1 - x_3}{2\Delta} \right\} \Delta \quad (19)$$

Damit sollte klar sein, wie die übrigen Integrale auszuwerten sind:

- Die Funktionen c , a , f werden im Mittelpunkt des aktuellen Dreiecks ausgewertet
- Die Funktionen g und g werden im Mittelpunkt der aktuellen Kante ausgewertet
- Die partiellen Ableitungen sind in (16) und (17) beschrieben

Das Dreieck A mit den Knoten p_1 , p_2 und p_3 liefert Beiträge zu $K_{11}, K_{12}, K_{13}, K_{21}, K_{22}, K_{23}, K_{31}, K_{32}, K_{33}, F_1, F_2$ und F_3 . Beiträge zu K_{11} beispielsweise kommen auch von den Dreiecken C , D und E .

3 Einfache Beispiele

Wir werden in diesem Abschnitt einige Probleme aus der Physik behandeln, die in die vorher erörterte Klasse passen.

3.1 Elektrostatik

Zu lösen sind die Maxwell-Gleichungen $\nabla \mathbf{D} = \rho$ und $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ zusammen mit der Materialgleichung $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$. \mathbf{E} ist das elektrische Feld, \mathbf{D} das Verschiebungsfeld. ρ , die Ladungsdichte, beschreibt die Verteilung der elektrischen Ladung. ϵ ist die Dielektrizitätskonstante (Permittivität) des Mediums.

Bekanntlich kann man das rotationsfreie elektrische Feld durch $\mathbf{E} = -\nabla \phi$ darstellen. Für das Potential ϕ ergibt sich damit die Gleichung

$$-\nabla \epsilon \nabla \phi = \rho . \quad (20)$$

Sind die Ladungsverteilung, die Dielektrizitätskonstante und damit das Potential von z unabhängig, dann liegt ein Problem (3) vor mit $u = \phi$, $c = \epsilon$, $a = 0$ und $f = \rho$.

3.2 Magnetostatik

Zu lösen sind die Maxwell-Gleichungen $\nabla \mathbf{B} = 0$ und $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}$ zusammen mit der Materialgleichung $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$. \mathbf{B} ist die Induktion und \mathbf{H} die magnetische Feldstärke. Die Stromdichte \mathbf{j} beschreibt die Stromverteilung. μ heißt Permeabilität.

Das divergenzfreie Induktionsfeld kann man bekanntlich als die Rotation eines Vektorpotentials \mathbf{A} darstellen. Damit gilt

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} \right) = \mathbf{j} . \quad (21)$$

Wenn der Strom in z -Richtung fließt, $\mathbf{j} = (0, 0, j)$, dann hat auch das Vektorpotential nur eine z -Komponente A . Das Induktionsfeld ist $\mathbf{B} = (\partial_y A, -\partial_x A, 0)$. Die x - und y -Komponenten der Rotation des Magnetfeldes verschwinden, und die Gleichung für die z -Komponente ist

$$-\partial_x \frac{1}{\mu} \partial_x A - \partial_y \frac{1}{\mu} \partial_y A = j . \quad (22)$$

Wieder haben wir ein Problem (3) mit $u = A$, $c = 1/\mu$, $a = 0$ und $f = j$.

3.3 Gleichstrom

In einem leitenden Medium gilt das Ohmsche Gesetz $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$. Mit $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ und der Kontinuitätsgleichung $\dot{\rho} + \nabla\mathbf{j} = 0$ bedeutet das im stationären Fall

$$-\nabla\sigma\nabla\phi = 0 \quad . \quad (23)$$

Für eine dünne Platte oder in anderen Situationen, bei denen die z -Abhängigkeit verschwindet, haben wir schon wieder ein Problem der Klasse (3).

Wir betrachten eine dünne rechteckige Erdungsplatte mit zwei kreisförmigen Kontakten, auf dem Rand $\phi = 1$ bzw. $\phi = -1$ gilt (Dirichlet). Senkrecht zum Rand der Platte fließt kein Strom, daher verschwindet dort die Normalkomponente der elektrischen Feldstärke, und es gilt $\mathbf{n}\nabla\phi = 0$ (von Neumann).

Die Lösung ist in Abbildung 3 dargestellt.

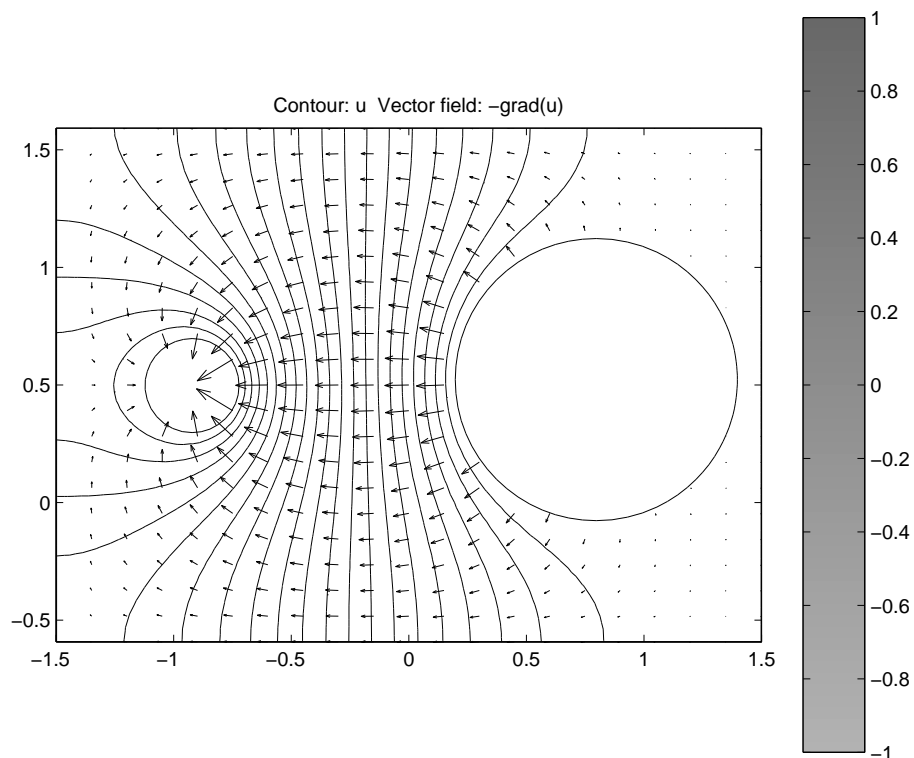


Abbildung 3: Elektrische Feldstärke (Pfeile) bzw. Äquipotentiallinien für zwei Kontakte auf einer leitenden Platte.

4 Erweiterungen

Die in (3) eingeführte Klasse partieller Differentialgleichung läßt sich beträchtlich erweitern, so daß man im Kern noch immer die Methode der Finiten Elemente anwenden kann. Wir gehen nun allerdings nicht mehr ausführlich darauf ein, wie die Matrizen K und Vektoren F in (9) und in analogen Gleichungen auszurechnen sind. Wir stellen die Erweiterungen einzeln vor, sie lassen sich dann kombinieren.

4.1 Elliptisches System

Wir lassen jetzt mehrere unbekannte Funktionen u_1, u_2, \dots, u_N auf dem Gebiet Ω zu. Außerdem wird $\nabla c \nabla$ zu $\partial_x c^{xx} \partial_x + \partial_y c^{yy} \partial_y + \partial_x c^{xy} \partial_y + \partial_y c^{yx} \partial_x$ erweitert. Das bedeutet

$$\sum_{s=1}^N \{-\partial_x c_{rs}^{xx} \partial_x - \partial_y c_{rs}^{yy} \partial_y - \partial_x c_{rs}^{xy} \partial_y - \partial_y c_{rs}^{yx} \partial_x + a_{rs}\} u_s = f_r \quad . \quad (24)$$

4.2 Parabolische und hyperbolische Gleichung

Die Felder können noch von der Zeit abhängen, $u = u(t, x, y)$. Wenn die Zeitableitung ∂_t in erster Ordnung vorkommt, hat man es mit

$$\partial_t u - \nabla c \nabla u + au = f \quad (25)$$

zu tun. Neben den Randbedingungen auf $\partial\Omega$ braucht man noch die Anfangsbedingung

$$u(0, x, y) = u^0(x, y) \quad \text{auf } \Omega \quad . \quad (26)$$

Die Entwicklungskoeffizienten U_i in

$$u(t, x, y) = \sum_{i=1}^n U_i(t) \phi_i(x, y) \quad (27)$$

bilden einen Vektor, der von der Zeit abhängt. Er genügt der Bewegungsgleichung

$$\dot{U} + KU = F \quad \text{mit} \quad U(0) = U^0 \quad . \quad (28)$$

K und F sind wie im Abschnitt 2 erklärt.

Kommt die Zeitableitung in zweiter Ordnung vor,

$$\partial_t^2 u - \nabla c \nabla u + au = f \quad , \quad (29)$$

dann benötigt man neben den Randwerten die Anfangswerte

$$u(0, x, y) = u^0(x, y) \quad \text{und} \quad \dot{u}(0, x, y) = v^0(x, y) \quad \text{auf} \quad \Omega \quad . \quad (30)$$

Das führt dann auf die Bewegungsgleichung

$$\ddot{U} + KU = F \quad \text{mit} \quad U(0) = U^0 \quad \text{und} \quad \dot{U}(0) = V^0 \quad , \quad (31)$$

in naheliegender Bezeichnung.

Für das parabolische Problem skizzieren wir das Lösungsverfahren. Einfachheitshalber nehmen wir an, daß K und F nicht von der Zeit t abhängen.

Man setzt $V = U - K^{-1}F$. Dafür gilt $\dot{V} = -KV$, und die Anfangsbedingung $V^0 = U^0 - K^{-1}F$ ist auch bekannt. Es genügt daher, (28) mit $F = 0$ zu behandeln.

Die formale Lösung ist

$$U(t) = e^{-tK} U^0 \quad . \quad (32)$$

Die Berechnung der Exponentialfunktion durch Diagonalisieren ist bei dünn besetzten Matrizen meist nicht möglich.

Man spricht von 'explizit', wenn gemäß

$$U(t+h) \approx (I - hK)U(t) \quad (33)$$

genähert wird. Das geht schnell, ist aber instabil in dem Sinne, daß die Fehler exponentiell anwachsen.

Man spricht von 'implizit', wenn gemäß

$$U(t) \approx (I + hK)U(t+h) \quad (34)$$

approximiert wird. Das ist langsam, weil ein lineares Gleichungssystem gelöst werden muß. Dafür ist das Verfahren aber stabil.

Integriert man in N Schritten von 0 bis t , dann ist in beiden Fällen der Fehler zu $1/N$ proportional.

Das als nächstes beschriebene Crank-Nicholson-Verfahren ist stabil und langsam, konvergiert jedoch eine Ordnung besser, nämlich mit $1/N^2$.

Man rechnet bis zur Mitte sowohl explizit vorwärts als auch explizit rückwärts:

$$U(t + \frac{h}{2}) \approx (I - \frac{h}{2}K)U(t) \approx (I + \frac{h}{2}K)U(t + h) \quad (35)$$

an, und das bedeutet

$$U(t + h) \approx (I + \frac{h}{2}K)^{-1} (I - \frac{h}{2}K) U(t) \quad (36)$$

Mit anderen Worten: das lineare Gleichungssystem

$$(I + \frac{h}{2}K) U(t + h) = (I - \frac{h}{2}K) U(t) \quad (37)$$

ist nach $U(t + h)$ aufzulösen.

Für die hyperbolisch Gleichung lassen sich ähnliche Überlegungen anstellen.

4.3 Eigenwertproblem

Gesucht ist eine Funktion $u = u(x, y)$ auf Ω , die der partiellen Differentialgleichung

$$\{-\nabla c \nabla + a\} u = \lambda d u \quad (38)$$

genügt. Dabei ist λ , der Eigenwert, eine noch unbekannte Zahl und d eine Funktion auf Ω .

Mit der Matrix

$$D_{ij} = \int_{\Omega} d\Omega \phi_i d\phi_j \quad (39)$$

wird daraus

$$KU = \lambda DU \quad (40)$$

Für dieses verallgemeinerte Eigenwertproblem gibt es ausgefuchste Algorithmen und entsprechende Fortran-Programme, die in MATLAB integriert sind und von der PDE-Toolbox benutzt werden. Hat man dünn besetzte Matrizen, dann lassen sich nicht alle, sondern nur einige Eigenwerte und Eigenvektoren berechnen.

4.4 Nichtlineare Probleme

Wir lassen nun zu, daß die Funktionen c , a und f in (3) auch noch von der gesuchten Lösung abhängen. Beispielsweise wird bei einem ferromagnetischen Material die Permeabilität μ in (22) von der Induktion abhängen, also von $|\nabla u|^2$. Die `PDE-Toolbox` hält Werkzeuge bereit, wie man solche nichtlinearen Probleme iterativ löst. Für eine Näherungslösung u^k wird in linearer Näherung eine Verbesserung δu ermittelt, so daß $u^{k+1} = u^k + \delta u$ die nächste Näherung ist. Das wird so nur funktionieren, wenn man genügend nahe an der Lösung ist. Die Autoren der `PDE-Toolbox` haben sich viel Mühe mit allen möglichen Verbesserungen gemacht.

5 Mehr Beispiele

In diesem Abschnitt führen wir Beispiele für die Erweiterungen an: Systeme elliptischer Gleichungen, parabolische und hyperbolische Gleichungen, elliptische Eigenwertprobleme sowie nichtlineare partielle Differentialgleichungen.

5.1 Elastizitätstheorie

Jede Bilanzgleichung hat die Form

$$\partial_t \rho(Y) + \partial_i j_i(Y) = \pi(Y) \quad . \quad (41)$$

Dabei ist Y eine addier- und transportierbare Größe, wie Masse, elektrische Ladung, Impuls, Energie und Entropie. $\rho(Y)$ ist die Dichte der entsprechenden Größe und $j_i(Y)$ die Stromdichte. $\pi(Y)$, die Quellstärke, gibt an, wieviel Y pro Zeit- und Volumeneinheit produziert wird.

Mit $\rho(M) = \rho$ als Massendichte und $j_i(M) = \rho v_i$ als Massenstromdichte muß man

$$\partial_t \rho + \partial_i \rho v_i = 0 \quad (42)$$

schreiben (Massenerhaltung).

Jede Stromdichte spalten man auf in den Strömungsanteil³ $\rho(Y) v_i$ und den Rest $J_i(Y)$, den Leitungsanteil⁴. Die Massenstromdichte hat keinen Leitungsanteil.

Wir behandeln jetzt die drei Impulskomponenten, $Y = P_k$. Die drei Impulsdichten sind ρv_k , die drei Impulsstromdichten schreiben wir als

$$j_i(P_k) = \rho v_k v_i - T_{ki} \quad . \quad (43)$$

T_{ki} , der Leitungsanteil zu den Impulsstromdichten, heißt auch Spannungstensor⁵.

Mit f_k als äußere Kraft auf die Volumeneinheit schreibt sich die Impuls-Bilanzgleichung als

$$\partial_t \rho v_k + \partial_i \{ \rho v_k v_i - T_{ki} \} = f_k \quad . \quad (44)$$

³convection

⁴conduction

⁵engl. stress

Bei einem ruhenden Medium vereinfacht sich das zu

$$\partial_i T_{ki} + f_k = 0 \quad . \quad (45)$$

Die Bilanzgleichung für den Drehimpuls läuft auf die Feststellung hinaus, daß der Spannungstensor unter Vertauschung der Indizes symmetrisch ist.

Bei einem elastischen Medium vergleichen wir das unbelastete System mit dem belasteten. Durch die Belastung wird ein materieller Punkt von \mathbf{x} an die Stelle $\mathbf{x} + \mathbf{u}$ verschoben. $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$ ist das Verschiebungsfeld. Die Belastung, oder Verzerrung des Systems, wird nicht durch das Verschiebungsfeld, sondern durch den Verzerrungstensor⁶ beschrieben,

$$S_{ki} = \frac{\partial_k u_i + \partial_i u_k}{2} \quad . \quad (46)$$

In der Tat verschwindet der Verzerrungstensor bei einer starren Verschiebung oder Drehung.

Im unbelasteten Zustand verschwinden sowohl der Verzerrungs- als auch der Spannungstensor. Im nicht allzu stark belasteten Zustand sollten daher S und T proportional zueinander sein. Genau das besagt das Hookesche Gesetz:

$$T_{ki} = \frac{E}{1 + \nu} \left\{ S_{ki} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \delta_{ki} S_{jj} \right\} \quad . \quad (47)$$

Dieser Ausdruck gilt für ein isotropes Medium. E heißt Elastizitätsmodul, und ν ist die Poissonsche Querkontraktionszahl, die Werte nur zwischen 0 und 1/2 annehmen kann.

Setzt man das alles ineinander ein, so ergeben sich drei gekoppelte partielle Differentialgleichungen für die drei Verschiebungsfelder:

$$-\left\{ \Delta u_k + \frac{1}{1 - 2\nu} \partial_k \partial_j u_j \right\} = \frac{2(1 + \nu)}{E} f_k \quad . \quad (48)$$

Im planaren Falle $f_3 = 0$, $u_3 = 0$, $u_1 = u_1(x_1, x_2)$ und $u_2 = u_2(x_1, x_2)$ ergibt sich

$$-\left\{ \frac{2(1 - \nu)}{1 - 2\nu} \partial_1 \partial_1 + \partial_2 \partial_2 \right\} u_1 - \left\{ \frac{1}{1 - 2\nu} \partial_1 \partial_2 \right\} u_2 = \frac{2(1 + \nu)}{E} f_1 \quad . \quad (49)$$

Die zweite Gleichung erhält man durch Vertauschen der Indizes 1 und 2.

⁶engl. strain

Das paßt in das Schema (24). Hier sind zwei Funktionen gesucht, und es treten gemischte partielle Ableitungen auf.

Wir verfolgen das Thema hier nicht weiter. Es genügt, wenn klar geworden ist, daß die Probleme der Elastizitätstheorie (Festigkeitslehre, structural mechanics) auf Systeme elliptischer partieller Differentialgleichungen führen. Und daß man solche Probleme mit der Methode der finiten Elemente behandeln sollte. Läßt sich die Aufgabe nicht auf ein zweidimensionales Problem zurückführen, dann braucht man bessere Werkzeuge – und erheblich schnellere Rechner.

5.2 Wärmeleitung

Die Bilanzgleichung für die innere Energie U ist

$$\partial_t u + \partial_i \{uv_i + J_i^w\} = u^* \quad , \quad (50)$$

mit u als Dichte der inneren Energie, J_i^w als Wärmestromdichte und u^* als Quellstärke der inneren Energie. Das kann Joulsche Wärme sein (Induktionsheizung, Lichtabsorption), aber auch durch radioaktive Zerfälle entsteht innere Energie.

Wir spezialisieren auf reine Wärmeleitung, setzen also $v_i = 0$.

Die innere Energie hängt von der Temperatur ab, die sich zeitlich ändern kann. Für die Wärmestromdichte setzen wir an, daß sie zum Gradienten der Temperatur proportional ist. Das führt auf

$$\rho C \partial_t T - \partial_i \lambda \partial_i T = u^* \quad . \quad (51)$$

λ ist die Wärmeleitfähigkeit und C die spezifische Wärme⁷. (51) paßt in das Schema (25).

Für die Konzentration c von Teilchen, die sich in einer Flüssigkeit oder in einem Festkörper durch massenweise Brownsche Bewegung ausbreiten, gilt ganz analog dazu die Diffusionsgleichung

$$\partial_t c - \partial_i D \partial_i c = c^* \quad . \quad (52)$$

D ist die Diffusionskonstante. Anlaß zu einer Quellstärke c^* von Teilchen sind meist chemische Reaktionen.

⁷Wärmekapazität pro Masseneinheit

5.3 Eigenschwingungen einer Membran

Wir betrachten eine ebene Membran, die im Ruhezustand in der x, y -Ebene liegt. Der Rand werde festgehalten. Die Auslenkung $z = z(t, x, y)$ genügt der Wellengleichung

$$\ddot{z} = c^2 \Delta z \quad , \quad (53)$$

einer Wellengleichung. Das ist eine hyperbolische Differentialgleichung, die in das Schema (27) paßt.

Wir suchen hier nach Eigenschwingungsmoden, also nach Lösungen der Gestalt

$$z(t, x, y) = e^{-i\omega t} u(x, y) \quad . \quad (54)$$

Für die Modenfunktion u ergibt sich die Eigenwertgleichung

$$-\Delta u = \frac{\omega^2}{c^2} u \quad . \quad (55)$$

Das paßt in das allgemeine Schema

$$-\nabla c \nabla u + au = \lambda du \quad . \quad (56)$$

In den sechziger Jahren war die Berechnung der Eigenmoden auf einem L-förmigen Gebiet aus drei gleichen Quadraten ein beliebter *benchmark test*. MATLAB hat die Darstellung der Grundmode sogar zu seinem Logo gemacht, weil das entsprechende Programm so kurz war.

Mit den Werkzeugen der PDE-Toolbox formulieren wir das Problem so:

```
1  % this file is lshape.m
2
3  % use the geometry file lshapeg.m
4  % [p,e,t] describes the mesh: points, edges, triangles
5  % init mesh, refine twice
6
7  [p,e,t]=initmesh('lshapeg');
8  [p,e,t]=refinemesh('lshapeg',p,e,t);
9  [p,e,t]=refinemesh('lshapeg',p,e,t);
10
11 % use the boundary condition file lshapeb.m
12 % u=0 on \partial\Omega
```

```

13 % -\nabla c \nabla u + a u = \lambda d u
14 % c=1, a=0, d=1
15 % eigenvalue solver pdeeig(boundary,p,e,t,c,a,d,r)
16 % r is interval where eigenvalues are searched for
17
18 [v,l]=pdeeig('lshapeb',p,e,t,1,0,1,[0 100]);
19
20 % u=v(:,n) is eigenmode field n=1,2,...

```

Vier Zeilen und die beiden Dateien `lshapeg.m` und `lshapeb.m`, um die Geometrie des Problems und die Randbedingungen (hier: $u = 0$ auf $\partial\Omega$) zu beschreiben.

Die Angaben über die Geometrie braucht man, um eine Triangulation zu erzeugen. Diese besteht aus Matrizen `p`, `e`, `t`, die Stützstellen, Kanten und Dreiecke beschreiben. Das anfängliche Maschennetz wird zweimal verfeinert.

Mit den Randbedingungen, dem Maschennetz, $c = 1$, $a = 0$, $d = 1$ sucht man nun nach den Eigenlösungen im Bereich $0 \leq \lambda \leq 100$. `pdeeig` gibt eine Matrix `v` von Eigenvektoren und einen Vektor `l` von Eigenwerten λ zurück.

Mit

```

>> lshape;
>> u = v(:,1);
>> pdecont(p,t,u);
>> hold on;
>> pdegplot('lshapeg');
>> print -deps 'lshape.eps'

```

kann man die Grundmode in einer Höhenliniendarstellung veranschaulichen (Abbildung 4).

Das Maschennetz besteht aus 2145 Knoten und 4128 Dreiecken. Im angegebenen Bereich für die Eigenwerte wurden 19 Moden gefunden.

Wenn Sie die Grundmode als 3D-Bild in Farbe bewundern wollen, dann schauen Sie sich das MATLAB-Logo beim Laden des Programmes an.

5.4 Minimale Flächen

Wir betrachten ein Gebiet Ω in der x, y -Ebene. $z = u(x, y)$ beschreibt eine Fläche. Auf dem Rand $\partial\Omega$ ist u vorgegeben. Wie sieht die Fläche mit dem kleinsten Flächeninhalt aus?

Nun, man überzeugt sich leicht davon, daß der Flächeninhalt durch das

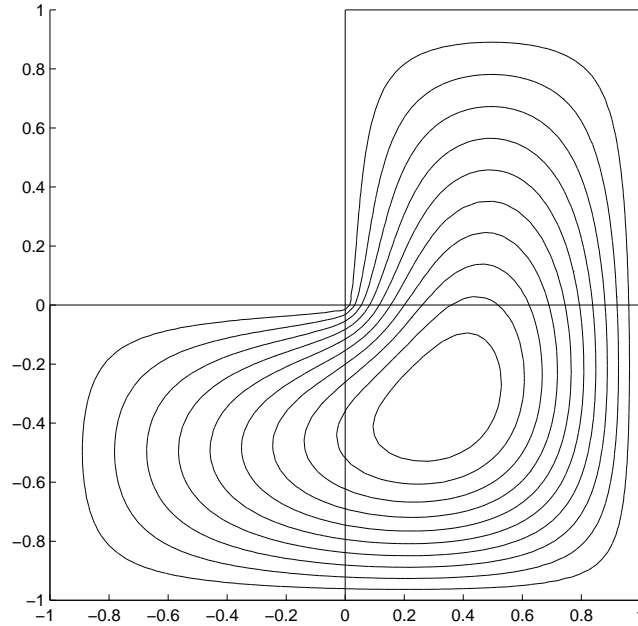


Abbildung 4: Die Grundmode einer L-förmigen Membran

Integral

$$\mathcal{F}(u) = \int_{\Omega} dx dy \sqrt{1 + (\partial_x u)^2 + (\partial_y u)^2} \quad (57)$$

gegeben ist. Wir betrachten eine mit den Randbedingungen verträgliche Variation v , $v(x, y) = 0$ für $(x, y) \in \partial\Omega$. Am Minimum muß die Frechet-Ableitung

$$\left. \frac{d\mathcal{F}(u + \alpha v)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = - \int_{\Omega} dx dy \left\{ \nabla \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \nabla u \right\} v \quad (58)$$

verschwinden, und das bedeutet

$$- \nabla \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \nabla u = 0 \quad (59)$$

Diese partielle Differentialgleichung für die minimale Fläche ist im Prinzip vom Typ (3) mit $a = 0$ und $f = 0$. Allerdings ist die Funktion $c = c(x, y)$ nicht direkt vom Ort abhängig, sondern indirekt über die Lösung u . Die elliptische Differentialgleichung (59) ist nichtlinear.

Die PDE-Toolbox illustriert diese Aufgabe. Untersucht wird der Einheitskreis, und die Fläche soll den Wert $u = x^2$ auf dem Rand $x^2 + y^2 = 1$ haben.

Die Geometrie sowie die Randbedingungen werden in Dateien `circleg.m` und `circleb.m` bereitgestellt.

Das folgende kurze MATLAB-Programm löst die Aufgabe:

```
1  % this file is minarea.m
2
3  g='circleg';
4  b='circleb';
5  c='1./sqrt(1+ux.^2+uy.^2)';
6  rtol=1e-3;
7
8  [p,e,t]=initmesh(g);
9  [p,e,t]=refinemesh(g,p,e,t);
10
11 u=pdenonlin(b,p,e,t,c,0,0);
12
13 pdesurf(p,t,u);
```

Das Ergebnis entspricht vollständig den Erwartungen.