

OSNABRÜCKER SCHRIFTEN ZUR MATHEMATIK

Reihe V Vorlesungsskripten

EHeft 11 Wintersemester 2003/04

Analysis II

W. Bruns

Fachbereich Mathematik/Informatik
Universität Osnabrück

OSM Osnabrücker Schriften zur Mathematik

September 2005

Herausgeber	Selbstverlag der Universität Osnabrück Fachbereich Mathematik/Informatik 49069 Osnabrück
Geschäftsführer	Prof. Dr. W. Bruns
Berater:	Prof. Dr. P. Brucker (Angew. Mathematik) Prof. Dr. E. Cohors-Fresenborg (Didaktik der Mathematik) Prof. Dr. V. Sperschneider (Informatik) Prof. Dr. R. Vogt (Reine Mathematik)
Druck	Hausdruckerei der Universität Osnabrück

Copyright bei den Autoren

Weitere Reihen der OSM:

- Reihe D Mathematisch-didaktische Manuskripte
- Reihe I Manuskripte der Informatik
- Reihe M Mathematische Manuskripte
- Reihe P Preprints
- Reihe U Materialien zum Mathematikunterricht

Analysis II

Winfried Bruns

Skript zur Vorlesung WS 2003/2004

Das Skript ist nur zum persönlichen Gebrauch der Hörer bestimmt.

Inhaltsverzeichnis

1. Metrische Räume und ihre Topologie	1
2. Konvergenz und Stetigkeit	7
3. Kompaktheit und Zusammenhang	14
4. Wege und ihre Längen	20
5. Differenzierbarkeit von Abbildungen	27
6. Parameterabhängige Integrale	38
7. Höhere Ableitungen, Taylor-Formel, lokale Extrema	41
8. Vektorfelder und Wegintegrale	51
9. Implizite Funktionen	58
10. Komplexe Funktionen	71
11. Die Cauchysche Integralformel	78
12. Holomorphe Funktionen	85
13. Differentialgleichungen	88
14. Differentialgleichungen in getrennten Variablen	92
15. Der Satz von Picard-Lindelöf	97
16. Lineare Differentialgleichungen	104
17. Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	112
18. Systeme linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	121
Literaturverzeichnis	130

ABSCHNITT 1

Metrische Räume und ihre Topologie

Bereits in der Analysis einer Variablen ist oft der Abstand $|x - y|$ reeller Zahlen x, y aufgetreten, insbesondere bei der Definition des Grenzwerts und bei der ε - δ -Beschreibung der Stetigkeit. In diesem Abschnitt studieren wir Räume mit Abstandsfunktion systematisch:

Definition. Sei M eine Menge. Eine Funktion $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Metrik* auf M , falls folgende Bedingungen für alle $x, y, z \in M$ erfüllt sind:

- (a) $d(x, y) \geq 0$,
- (b) $d(x, y) = 0 \iff x = y$,
- (c) $d(x, y) = d(y, x)$,
- (d) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Die Gleichung (d) heißt *Dreiecksungleichung*; (c) ist die Symmetrie der Metrik; (a) und (b) besagen, daß Punkte $x \neq y$ einen positiven Abstand und x von sich selbst den Abstand 0 hat.

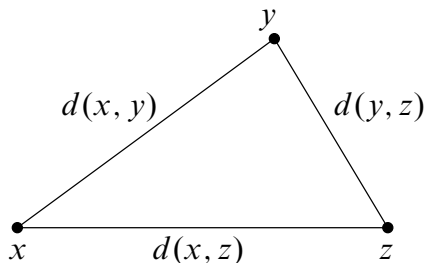


ABBILDUNG 1. Dreiecksungleichung

Man nennt dann (M, d) oder auch einfach M einen *metrischen Raum*.

Beispiel 1.1.

- (a) $M = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$.
- (b) M eine beliebige Menge, $d(x, y) = 1$ falls $x \neq y$, $d(x, x) = 0$
- (c) Ist (M, d) ein metrischer Raum, so können wir d auf jede Teilmenge $N \subset M$ einschränken:

$$d_N(x, y) = d(x, y),$$

und N wird mit d_N selbst zu einem metrischen Raum. Man nennt d_N die *von d auf N induzierte Metrik*.

Die wichtigsten Beispiele metrische Räume entstehen aus normierten Vektorräumen. Sei V ein Vektorraum über \mathbb{R} . Eine Funktion $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ heißt eine *Norm*, wenn folgendes gilt:

- (a) $\|x\| \geq 0$ für alle $x \in V$,
- (b) $\|x\| = 0 \iff x = 0$,
- (c) $\|ax\| = |a| \cdot \|x\|$ für alle $a \in \mathbb{R}, x \in V$,
- (d) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ für alle $x, y \in V$.

Hier heißt (d) ebenfalls Dreiecksungleichung. Wenn wir

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

setzen, so ist d eine Metrik auf V . Auf dem \mathbb{R}^n ist

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

eine Norm, die *euklidische Norm*, und die von ihr induzierte Metrik heißt *euklidische Metrik*. Wenn wir ohne weitere Präzisierung vom \mathbb{R}^n als metrischem Raum sprechen, verwenden wir die Euklidische Metrik. Häufig benutzt man auf \mathbb{R}^n aber auch die Supremumsnorm:

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_i|; i = 1, \dots, n\}.$$

Es gilt offensichtlich

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_{\text{Euklid}} \leq \sqrt{n} \cdot \|x\|_\infty$$

(vgl. Übungsaufgabe).

Sei X eine Menge und $B(X)$ der Vektorraum der beschränkten Funktionen $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Dann ist durch

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$$

die *Supremumsnorm* auf $B(X)$ definiert. Wir haben sie in der Analysis I bereits kennengelernt, jedenfalls in einem Spezialfall.

Wie in \mathbb{R} hat man in allen metrischen Räumen ε -Umgebungen:

Definition. Sei (M, d) ein metrischer Raum. Dann heißt

$$U_\varepsilon(x) = \{y \in M : d(x, y) < \varepsilon\}$$

die ε -Umgebung von $x \in M$.

Andere Rede- und Schreibweisen für $U_\varepsilon(x)$:

$B(x, \varepsilon)$, $K(x, \varepsilon)$: offene *Kugel* mit Mittelpunkt x und Radius ε .

Es ist sinnvoll, einen allgemeineren Umgebungsbegriff einzuführen:

Definition. $U \subset M$ heißt *Umgebung* von x , falls ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x) \subset U$ existiert.

Satz 1.2. In einem metrischen Raum (M, d) gilt das Hausdorffsche Trennungsaxiom: Zu $x, y \in M$, $x \neq y$, existiert ein $\varepsilon > 0$ mit

$$U_\varepsilon(x) \cap U_\varepsilon(y) = \emptyset.$$

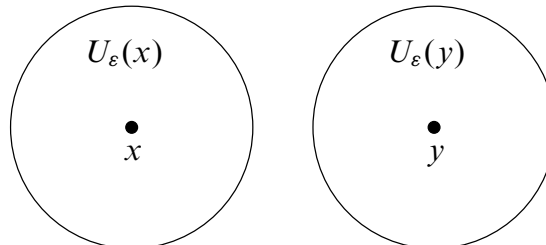


ABBILDUNG 2. Hausdorffsches Trennungsaxiom

Beweis. Wähle $\varepsilon = \frac{1}{2}d(x, y)$. Falls ein $z \in U_\varepsilon(x) \cap U_\varepsilon(y)$ existierte, würde

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

sein. □

Wir verallgemeinern nun die offenen Intervalle:

Definition. Eine Teilmenge U eines metrischen Raumes M heißt *offen*, falls U Umgebung jeden Punktes $x \in U$ ist.

Beispiel 1.3.

- (a) \mathbb{R} , die Intervalle $] - \infty, a[$, $]a, \infty[$ und die Intervalle $]a, b[$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, sind offene Teilmengen von \mathbb{R} .
- (b) In jedem metrischen Raum M ist $U_\varepsilon(x)$ für jedes $x \in M$ und $\varepsilon > 0$ offen: Für $y \in U_\varepsilon(x)$ gilt $U_\delta(y) \subset U_\varepsilon(x)$, sobald $\delta \leq \varepsilon - d(x, y)$. (Siehe Abbildung 3.)

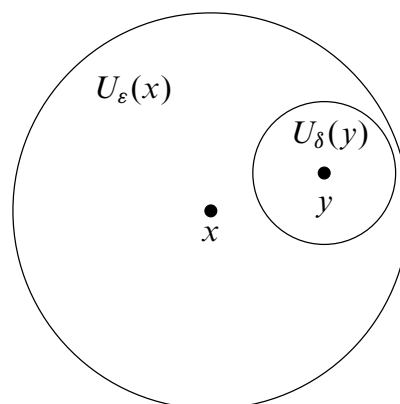


ABBILDUNG 3. $U_\varepsilon(x)$ ist offen

- (c) Die Intervalle $] - \infty, a]$, $[a, b]$ und $[a, \infty[$ sind für $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, nicht offen.
- (d) In jedem metrischen Raum M sind M und \emptyset offen. Im \mathbb{R}^n sind die *offenen Quader*

$$\{x \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i < b_i, \quad i = 1, \dots, n\},$$

offene Mengen, wobei a_i und b_i für jedes i reelle Zahlen sind.

Satz 1.4. Sei M ein metrischer Raum.

- (a) Der Durchschnitt $U_1 \cap \dots \cap U_n$ offener Mengen U_1, \dots, U_n ist offen.
- (b) Für jede Familie $(U_i)_{i \in I}$ offener Mengen ist auch $\bigcup_{i \in I} U_i$ offen.

Beweis. (a) Der allgemeine Fall folgt aus dem Fall $n = 2$ per Induktion. Sei also $x \in U_1 \cap U_2$. Dann existieren $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ mit $U_{\varepsilon_1}(x) \subset U_1$, $U_{\varepsilon_2}(x) \subset U_2$. Für $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ ist $U_\varepsilon(x) \subset U_1 \cap U_2$.

(b) Sei $x \in U = \bigcup_{i \in I} U_i$. Dann existiert ein $j \in I$ mit $x \in U_j$. Da U_j Umgebung von x ist, ist die Obermenge U erst recht Umgebung von x . \square

Der Durchschnitt beliebig vieler offener Mengen ist i.a. nicht offen. Für $M = \mathbb{R}$ ist z.B.

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_{1/n}(0) = \{0\}$$

nicht offen.

Der zu „offen“ duale Begriff ist „abgeschlossen“:

Definition. Eine Teilmenge A eines metrischen Raumes M heißt *abgeschlossen*, wenn $M \setminus A$ offen ist.

Die Mengen M und \emptyset sind stets abgeschlossen, denn ihre Komplemente \emptyset und M sind offen. Beispiele abgeschlossener Mengen sind die *abgeschlossenen Quader*

$$\{x \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i, \quad i = 1, \dots, n\}$$

für $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $r = 1, \dots, n$. Ferner sind in jedem metrischen Raum M die *abgeschlossenen Kugeln*

$$\overline{U}_\varepsilon(x) = \{y \in M : d(x, y) \leq \varepsilon\}$$

auch wirklich abgeschlossene Mengen (weshalb?).

Dual zu 1.4 gilt:

Satz 1.5. Sei M ein metrischer Raum.

- (a) Die Vereinigung $A_1 \cup \dots \cup A_n$ abgeschlossener Mengen A_1, \dots, A_n ist abgeschlossen.
- (b) Für jede Familie $(A_i)_{i \in I}$ abgeschlossener Mengen ist auch $\bigcap_{i \in I} A_i$ abgeschlossen.

Dies folgt aus Satz 1.4 und den Regeln von de Morgan:

$$M \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_n) = (M \setminus A_1) \cap \dots \cap (M \setminus A_n), \quad M \setminus \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} M \setminus A_i.$$

Die Begriffe „Randpunkte“ und „innerer Punkt“ sind uns von Intervallen vertraut, ebenso der Begriff „Häufungspunkt“. Auch sie lassen sich verallgemeinern:

Definition. Sei M ein metrischer Raum, $U \subset M$. Dann ist $x \in M$ ein *innerer Punkt* von U , falls U Umgebung von x ist (speziell ist $x \in U$). Man nennt $x \in M$ einen *Randpunkt* von U , falls in jeder Umgebung von x Punkte aus U und $M \setminus U$ liegen, mit anderen Worten, wenn x weder innerer Punkt von U noch von $M \setminus U$ ist. Man nennt

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{U} &= \{x \in U : U \text{ Umgebung von } x\} \text{ den } \textit{offenen Kern}, \text{ oder das } \textit{Innere} \text{ von } U, \\ \partial U &= \{x \in M : x \text{ Randpunkt von } U\} \text{ den } \textit{Rand} \text{ von } U, \\ \overline{U} &= U \cup \partial U \text{ die } \textit{abgeschlossene Hülle} \text{ von } U. \end{aligned}$$

Schließlich ist $x \in M$ *Häufungspunkt* von U , wenn in jeder Umgebung von x mindestens ein $y \in U$, $y \neq x$, liegt. (Wir könnten genau so gut verlangen, daß in jeder Umgebung unendlich viele Punkte von U liegen.)

Offensichtlich (?) besteht \overline{U} gerade aus U und allen Häufungspunkten von U . Man nennt $M \setminus \overline{U} = (M \setminus U)^\circ$ auch das *Äußere* von U .

Satz 1.6. Sei M metrischer Raum und $U \subset M$.

- (a) $\overset{\circ}{U}$ ist offen.
- (b) ∂U und \overline{U} sind abgeschlossen.

Beweis. (a) Sei $x \in \overset{\circ}{U}$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x) \subset U$. Da $U_\varepsilon(x)$ Umgebung eines jeden $y \in U_\varepsilon(x)$ ist, ist auch U Umgebung eines jeden $y \in U_\varepsilon(x)$. Folglich ist $U_\varepsilon(x) \subset \overset{\circ}{U}$.

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} \partial U &= M \setminus (\overset{\circ}{U} \cup (M \setminus U)^\circ), \\ \overline{U} &= M \setminus (M \setminus U)^\circ. \end{aligned}$$

Die Komplemente von ∂U und \overline{U} sind also offen. □

Offensichtlich gilt:

$$\begin{aligned} U \text{ offen} &\iff U = \overset{\circ}{U}, \\ A \text{ abgeschlossen} &\iff A = \overline{A}. \end{aligned}$$

Daraus folgt speziell $(\overset{\circ}{U})^\circ = \overset{\circ}{U}$, $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

Das System der offenen Mengen eines metrischen Raumes nennt man seine *Topologie*. (Zum allgemeinen Begriff des topologischen Raumes vgl. die Literatur.) Viele der im folgenden diskutierten Eigenschaften von Mengen und Abbildungen hängen nur von den Topologien der beteiligten Räume, nicht aber direkt von den Metriken ab. Zum Beispiel definieren Euklidische und Supremumnorm die gleiche Topologie auf dem \mathbb{R}^n . Bei Beweisen kann man dies manchmal nutzen. (vgl. auch Übungsaufgabe).

Manche der im folgenden diskutierten Eigenschaften einer Teilmenge N von M hängen nur von der auf N induzierten Metrik (oder Topologie) ab; sieh dazu Beispiel 1.1(c). Für die Diskussion dieser Eigenschaften benötigen wir folgende Beobachtung:

Satz 1.7. *Sei M ein metrischer Raum und $N \subset M$. Dann gilt:*

- (a) *Für alle $x \in N$ ist $U_\varepsilon^N(x) = U_\varepsilon^M(x) \cap N$.*
- (b) *Eine Teilmenge V von N ist genau offen, wenn es eine offene Teilmenge U von M mit $V = U \cap N$ gibt.*
- (c) *eine Teilmenge B von N ist genau abgeschlossen, wenn es eine abgeschlossene Teilmenge A von M mit $B = A \cap N$ gibt.*

Beweis. (a) folgt sofort aus $d_N(x, y) = d(x, y)$ für $x, y \in N$.

Für (b) sei zunächst $U \subset M$ offen und $x \in V = U \cap N$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon^M(x) \subset U$. Gemäß (a) ist $U_\varepsilon^N(x) \subset U \cap N = V$. Ist umgekehrt $V \subset N$ offen, so wählen wir

$$U = \bigcup \{U_\varepsilon^M(x) : x \in N, U_\varepsilon^N(x) \subset V\}.$$

Dann ist U offen und $V = U \cap N$.

- (c) folgt aus (b) durch Übergang zu den Komplementen in N und M . □

ABSCHNITT 2

Konvergenz und Stetigkeit

In diesem Abschnitt verallgemeinern wir die Begriffe Konvergenz und Stetigkeit auf metrische Räume. Viele der Beweise aus der Analysis I können dann fast wörtlich übernommen werden.

Definition. Sei M ein metrischer Raum. Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \in M$ für alle n konvergiert gegen $x \in M$, falls für jede Umgebung U von x ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $x_n \in U$ für alle $n \geq N$. Wir schreiben dann wie gewohnt

$$x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k.$$

Da jede Umgebung eine ε -Umgebung enthält, genügt es zu verlangen, daß zu jeder ε -Umgebung ein N mit $x_n \in U_\varepsilon(x)$ für alle $n \geq N$ existiert. Dies wiederum ist offensichtlich äquivalent zu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x, x_n) = 0.$$

Im \mathbb{R}^n lassen sich die konvergenten Folgen sehr einfach charakterisieren:

Satz 2.1. Eine Folge (x_k) in \mathbb{R}^n konvergiert genau dann gegen $y \in \mathbb{R}^n$, wenn für jedes $i = 1, \dots, n$ die Folge (x_{ki}) gegen y_i konvergiert.

Beweis. \Rightarrow : Es gilt $|x_{ki} - y_i| \leq \|x_k - y\|$. Also impliziert $\lim \|x_k - y\| = 0$, daß $\lim |x_{ki} - y_i| = 0$ ist, mithin $\lim x_{ki} = y_i$.

\Leftarrow : Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ für das

$$|x_{ki} - y_i| < \varepsilon \quad \text{für alle } k \geq N \quad \text{und } i = 1, \dots, n.$$

Es folgt

$$\|x_k - y\| = \left(\sum_{i=1}^n (x_{ki} - y_i)^2 \right)^{1/2} < (n \cdot \varepsilon^2)^{1/2} = \sqrt{n} \cdot \varepsilon$$

für alle $k \geq N$. □

Wie in der Analysis I definiert man den Begriff des Häufungspunktes: a ist *Häufungspunkt* von (x_k) wenn in jeder Umgebung von x unendlich viele Folgenglieder liegen. Dies ist äquivalent zur Existenz einer gegen a konvergierenden Teilfolge von (x_k) .

Die abgeschlossenen Teilmengen eines metrischen Raumes kann man nun mit der Konvergenz charakterisieren:

Satz 2.2. Für eine Teilmenge A eines metrischen Raumes M sind folgende Aussagen gleichwertig:

- (a) A ist abgeschlossen;
- (b) für jede konvergente Folge (x_k) mit $x_k \in A$ für alle k ist $\lim x_k \in A$.

Beweis. (a) \Rightarrow (b): Sei A eine beliebige Teilmenge von M . Es genügt zu zeigen, daß $y = \lim x_k \in \overline{A}$ für jede Folge (x_k) in A . Dies ist klar, falls $\lim x_k \in A$. Sei also $y \notin A$. Dann liegen in jeder Umgebung von y Punkte von A , nämlich x_k für $k \gg 0$, und $M \setminus A$, nämlich y . Folglich $y \in \partial A \subset \overline{A}$.

(b) \Rightarrow (a): Sei A nicht abgeschlossen. Dann gibt es einen Randpunkt y von A mit $y \notin A$. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ existiert ein $x_k \in A$ mit $x_k \in U_{1/k}(y)$. Offensichtlich ist $\lim x_k = y$. \square

Auch der Begriff der Cauchy-Folge läßt sich direkt übertragen:

Definition. Eine Folge (x_k) in einem metrischen Raum M heißt *Cauchy-Folge*, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \text{für alle } n, m \geq N.$$

Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge, aber im allgemeinen konvergiert eine Cauchy-Folge in einem metrischen Raum nicht: wir können etwa \mathbb{Q} mit der von \mathbb{R} induzierten Metrik nehmen: Eine gegen $\sqrt{2}$ konvergente Folge rationaler Zahlen ist eine Cauchy-Folge, aber $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Definition. Ein metrischer Raum, in dem jede Cauchy-Folge konvergiert, heißt *vollständig*.

Satz 2.3. \mathbb{R}^n ist ein vollständiger metrischer Raum.

Beweis. Wenn (x_k) eine Cauchy-Folge in \mathbb{R}^n ist, so ist offensichtlich (x_{ki}) für jedes i eine Cauchy-Folge in \mathbb{R} . Damit konvergiert (x_{ki}) bekanntlich für jedes i , und nach Satz 2.1 dann auch (x_k) . \square

Man nennt vollständige normierte Vektorräume *Banachräume* nach dem polnischen Mathematiker Stefan Banach. Speziell in ihnen läßt sich der *Banachsche Fixpunktsatz* anwenden.

Satz 2.4. Sei M ein vollständiger metrischer Raum und $A \subset M$ eine abgeschlossene Teilmenge, $A \neq \emptyset$. Die Abbildung $f: A \rightarrow A$ sei kontrahierend, d.h. es gebe ein $q \in \mathbb{R}$, $0 \leq q < 1$, mit

$$d(f(x), f(y)) \leq q \cdot d(x, y)$$

für alle $x, y \in A$. Dann besitzt f genau einen Fixpunkt $y \in A$ (d.h. $f(y) = y$). Weiterhin konvergiert für jeden Startwert $x_0 = x$ die Folge $x_1 = f(x_0)$, $x_2 =$

$f(x_1), \dots$ gegen y und es gilt für alle k :

$$d(x_k, y) \leq \frac{1}{1-q} d(x_k, x_{k+1}) \leq \frac{q^k}{1-q} d(x_1, x_0).$$

Beweis. Wir können annehmen, daß $M = A$, denn als abgeschlossene Teilmenge eines vollständigen metrischen Raumes ist A gemäß 2.2 selbst vollständig.

Offensichtlich besitzt f höchstens einen Fixpunkt, denn für Fixpunkte y_1, y_2 ist $d(f(y_1), f(y_2)) = d(y_1, y_2)$.

Wir wählen nun $x_0 \in M$ und betrachten die Folge $x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1)$ usw. Per Induktion folgt sofort

$$d(x_k, x_{k+1}) \leq q^k d(x_0, x_1).$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} d(x_0, x_k) &\leq d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2) + \dots + d(x_{k-1}, x_k) \leq d(x_0, x_1) \cdot \sum_{i=0}^{k-1} q^i \\ &\leq d(x_0, x_1) \cdot \frac{1}{1-q}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich wiederum per Induktion:

$$d(x_k, x_{k+m}) \leq q^k d(x_0, x_m) \leq \frac{q^k}{1-q} d(x_0, x_1).$$

Wegen $\lim q^k = 0$ ist jetzt klar, daß (x_k) eine Cauchy-Folge ist. Sei y ihr nach Voraussetzung existierender Grenzwert. Es gilt

$$\begin{aligned} d(y, f(y)) &\leq d(y, x_k) + d(x_k, x_{k+1}) + d(x_{k+1}, f(y)) \\ &\leq (1+q)d(y, x_k) + d(x_k, x_{k+1}). \end{aligned}$$

Für $k \rightarrow \infty$ geht die rechte Seite gegen 0. Also ist $d(y, f(y)) = 0$ und somit $y = f(y)$ ein Fixpunkt.

Einzig zu beweisen bleibt die Ungleichung

$$d(x_k, y) \leq \frac{1}{1-q} d(x_k, x_{k+1}).$$

Wir wählen k fest. Dann ist

$$\begin{aligned} d(x_k, y) &\leq d(x_k, x_{k+1}) + d(x_{k+1}, x_{k+2}) + \dots + d(x_{k+m}, x_{k+(m+1)}) \\ &\quad + d(x_{k+(m+1)}, y) \\ &\leq \frac{1}{1-q} d(x_k, x_{k+1}) + d(x_{k+(m+1)}, y) \end{aligned}$$

wie oben. Wegen $\lim d(x_{k+(m+1)}, y) = 0$ folgt die Behauptung. \square

Der Banachsche Fixpunktsatz ist fundamental für viele Iterationsverfahren der numerischen Mathematik, bei denen man die Lösung der Gleichung $y = f(y)$ durch die Folge $x_0, x_1 = f(x_0)$ usw. annähert. Der Fixpunktsatz liefert nicht nur die Existenz der Lösung, sondern zugleich auch eine wirksame Fehlerabschätzung für die Näherungswerte.

Ein weiteres wichtiges Prinzip mit dem man die Existenz von Lösungen gewisser Gleichungen nachweisen kann, ist der *Schachtelungssatz*. Er verwendet den Durchmesser

$$\text{diam}(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$$

einer Teilmenge A eines metrischen Raumes.

Satz 2.5. Sei M ein vollständiger metrischer Raum und $A_0 \supset A_1 \supset A_2, \dots$ eine absteigende Folge abgeschlossener, nichtleerer Teilmengen $A_i \subset M$ mit

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \text{diam}(A_i) = 0.$$

Dann gibt es genau ein $x \in M$, das im Durchschnitt der A_i liegt.

Beweis. Für jedes $i \in \mathbb{N}$ wählen wir nun $x_i \in A_i$. Dann ist (x_i) eine Cauchy-Folge! Sie konvergiert gegen ein $x \in M$. Da die A_i abgeschlossen sind, muß x in jedem A_i liegen. Daß es höchstens einen solchen Punkt gibt, ist offensichtlich. \square

Anmerkung. Die Vollständigkeit eines metrischen Raumes hängt nicht allein von der Topologie ab, sondern von der Metrik. Es ist aber klar, daß eine Metrik durch eine zu ihr äquivalente Metrik ersetzt werden kann, ohne daß die Menge der Cauchy-Folgen sich ändert.

Wie den Begriff der Konvergenz übertragen wir auch den der Stetigkeit (und den des Grenzwert einer Funktion).

Definition. Sei $f : M \rightarrow N$ eine Abbildung zwischen metrischen Räumen M und N . Man nennt f stetig in $a \in M$, wenn

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

ist, wenn also für jede Folge x_n mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$.

Die Abbildung f ist stetig auf M , falls sie in jedem $x \in M$ stetig ist.

Die Kettenregel der Stetigkeit gilt auch hier, und ihr Beweis ist identisch mit dem der Analysis I:

Satz 2.6. Seien M, N, P metrische Räume. Ist $f : M \rightarrow N$ stetig in x und $g : N \rightarrow P$ stetig in $f(x)$, so ist $g \circ f$ stetig in x .

Die Stetigkeit einer Abbildung in den \mathbb{R}^n läßt sich komponentenweise testen:

Satz 2.7. Sei M ein metrischer Raum, $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Abbildung. Genau dann ist f stetig, wenn die Komponenten f_i von f stetig sind.

Dabei setzen wir $f_i(x) = f(x)_i$; es ist also

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)).$$

Satz 2.7 folgt sofort aus Satz 2.1: Die Konvergenz der Folge $(f(x_k))$ gegen $f(a)$ läßt sich komponentenweise testen.

Die Rechenregeln für konvergente Folgen und ihre Grenzwerte können wir nun als Stetigkeitsaussagen interpretieren:

Satz 2.8. *Die Abbildungen*

$$\text{add} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{add}(x, y) = x + y,$$

$$\text{mult} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{mult}(x, y) = x \cdot y,$$

$$\text{quot} : \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{quot}(x, y) = \frac{x}{y}$$

sind stetig.

Beweis. Sei $\lim_{k \rightarrow \infty} (x_k, y_k) = (a, b)$. Dann ist

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{add}(x_k, y_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k + y_k = a + b = \text{add}(a, b)$$

wie wir aus der Analysis I wissen. Dies ist aber gerade die Stetigkeit von add. Für mult und quot beweist man sie genauso, wobei man die von quot auch aus der Stetigkeit von mult und der von $1/x : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ herleiten kann. (So sind wir ja auch bei den Folgen vorgegangen.) \square

Mittels Satz 2.7 erhalten wir aus 2.8, daß die Addition auch auf \mathbb{R}^n stetig ist. Die Aussagen über Stetigkeit von Summe, Produkt und Quotient stetiger Funktionen lassen sich nun (ohne Rückgriff auf Folgen) sofort beweisen:

Satz 2.9. *Seien $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen auf dem metrischen Raum M . Dann sind auch*

$$f + g : M \rightarrow \mathbb{R}, \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x),$$

$$fg : M \rightarrow \mathbb{R}, \quad (fg)(x) = f(x)g(x)$$

und, falls $g(x) \neq 0$ für alle $x \in M$,

$$\frac{f}{g} : M \rightarrow \mathbb{R}, \quad \frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

stetig auf M .

Beweis. Sei $F : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch $F(x) = (f(x), g(x))$. Dann ist

$$f + g = \text{add} \circ F$$

und die Stetigkeit von $f + g$ ergibt sich aus der von add, der Kettenregel und Satz 2.7. Analog beweist man die Aussagen über mult und quot. \square

Mittels Satz 2.8 können wir uns nun leicht eine große Klasse stetiger Funktionen beschaffen, nämlich Polynome und rationale Funktionen.

Definition. Seien $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$. Die Funktion

$$\mu : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mu(x_1, \dots, x_n) = x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$$

heißt ein *Monom* (oder eine Monomfunktion) vom Grad $k_1 + \dots + k_n$. Ein *Polynom* (oder eine Polynomfunktion) $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine Linearkombination

$$p = a_1 \mu_1 + \cdots + a_t \mu_t, \quad a_i \in \mathbb{R},$$

von Monomen. Man kann eine Polynomfunktion also in der Form

$$p = \sum_{k_1 + \dots + k_n \leq m} a_{k_1 \dots k_n} X_1^{k_1} \cdots X_n^{k_n}$$

schreiben. Wir verzichten darauf zu beweisen, daß die Koeffizienten $a_{k_1 \dots k_n}$ eindeutig durch die Funktion p bestimmt sind. Aus diesem Grund können wir aber p einem Grad zuordnen:

$$\text{grad } p = \max\{k_1 + \dots + k_n : a_{k_1 \dots k_n} \neq 0\}.$$

Die *rationalen Funktionen* ergeben sich als Quotienten von Polynomen. Sie sind natürlich nur außerhalb der Nullstellenmenge des Nenners definiert.

Wie im Fall einer Veränderlichen ergibt sich durch wiederholte Anwendung von Satz 2.9, daß Polynome und rationale Funktionen auf ihrem Definitionsgebiet stetig sind.

Wiederum in völliger Analogie zur Analysis I kann man die Stetigkeit einer Abbildung mittels des ε - δ -Kriteriums beschreiben:

Satz 2.10. Seien M, N metrische Räume, $f : M \rightarrow N$ eine Abbildung. Genau dann ist f in $x \in M$ stetig, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit

$$d(f(y), f(x)) < \varepsilon \quad \text{für alle } y \in M \quad \text{mit } d(y, x) < \delta.$$

Den Beweis sollte der Hörer selbst vom Spezialfall $M, N \subset \mathbb{R}$ ins Allgemeine übertragen. Wir können die Bedingung im ε - δ -Kriterium auch so formulieren:

$$f(U_\delta(x)) \subset U_\varepsilon(f(x)).$$

Nach dieser Beobachtung ist es leicht, die Stetigkeit ohne expliziten Rückgriff auf die Metrik zu beschreiben:

Satz 2.11. Seien M, N metrische Räume und $f : M \rightarrow N$ eine Abbildung. Genau dann ist f stetig in $x \in M$, wenn zu jeder Umgebung V von $f(x)$ eine Umgebung U von x mit $f(U) \subset V$ existiert.

Beweis. \Rightarrow : Sei U eine Umgebung von $f(x)$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(f(x)) \subset U$. Da f stetig in x ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit $f(U_\delta(x)) \subset U_\varepsilon(f(x)) \subset U$. Wir setzen nun $V = U_\delta(x)$.

\Leftarrow : Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert laut Voraussetzung eine Umgebung U von x mit $f(U) \subset U_\varepsilon(f(x))$; U wiederum enthält eine Umgebung $U_\delta(x)$. \square

Satz 2.11 läßt sich „globalisieren“:

Satz 2.12. *Seien M, N metrische Räume, $f : M \rightarrow N$ eine Abbildung. Dann sind äquivalent:*

- (a) f ist stetig;
- (b) für jede offene Teilmenge V von N ist $f^{-1}(V)$ offen;
- (c) für jede abgeschlossene Teilmenge B von N ist $f^{-1}(B)$ abgeschlossen.

Beweis. (a) \Rightarrow (b): Sei $x \in f^{-1}(V)$. Dann ist V , weil offen, Umgebung von $f(x)$. Nach 2.11 existiert eine Umgebung von x mit

$$f(U) \subset V.$$

Folglich ist $U \subset f^{-1}(V)$. Dies zeigt, daß $f^{-1}(V)$ offen ist.

(b) \Rightarrow (a): Sei V' eine Umgebung von $f(x)$ für ein gegebenes $x \in M$. Dann enthält V' eine Umgebung $V = U_\varepsilon(f(x))$. Diese ist eine offene Menge und ihr Urbild $f^{-1}(V)$ nach Voraussetzung offen. Es gilt $x \in f^{-1}(V)$, und $f^{-1}(V)$ ist eine Umgebung von x mit $f(f^{-1}(V)) \subset V \subset V'$.

Die Äquivalenz von (b) und (c) folgt aus der Definition von „abgeschlossen“ und der Beziehung $f^{-1}(B) = M \setminus f^{-1}(M \setminus B)$. \square

Satz 2.12 ist eine sehr nützliche Aussage, mit der man oft nachweisen kann, daß eine Menge offen oder abgeschlossen ist. Z.B. folgt sofort, daß für eine stetige Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ und jedes $a \in \mathbb{R}$ die *Niveaumenge*

$$\{x \in M : f(x) = a\}$$

abgeschlossen ist.

Noch eine Erinnerung an die Analysis I:

Definition. Seien M, N metrische Räume und (f_n) eine Folge von Abbildungen $f_n : M \rightarrow N$. Diese Folge konvergiert *gleichmäßig* gegen die Abbildung $f : M \rightarrow N$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$$

für alle $x \in M$ und $n \geq N$.

Punktweise Konvergenz wird natürlich ganz analog übertragen. Wie in der Analysis I beweist man:

Satz 2.13. *Mit den Bezeichnungen der vorangegangenen Definition gilt: Konvergiert (f_n) gleichmäßig gegen f und sind die (f_n) stetig, so ist auch f stetig.*

ABSCHNITT 3

Kompaktheit und Zusammenhang

Beschränkte abgeschlossene Intervalle I in \mathbb{R} haben einige besondere Eigenschaften. So hat zum Beispiel jede Folge in I einen Häufungspunkt in I (Satz von Bolzano-Weierstraß) und stetige Funktionen auf I besitzen ein absolutes Maximum und ein absolutes Minimum. Wir wollen zunächst Teilmengen in metrischen Räumen charakterisieren, für die analoge Aussagen gelten.

Definition. Sei M ein metrischer Raum. Unter einer *offenen Überdeckung* von M versteht man eine Familie $(U_i)_{i \in I}$ von offenen Mengen $U_i \subset M$ mit $M = \bigcup_{i \in I} U_i$. (Dabei wird keine Einschränkung hinsichtlich der Indexmenge I gemacht.)

Man nennt M *kompakt*, wenn es zu jeder offenen Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ endlich viele Indizes i_1, \dots, i_k gibt mit $M = \bigcup_{j=1}^k U_{i_j}$. Man nennt dann $(U_{i_1}, \dots, U_{i_k})$ eine *offene Teilüberdeckung* (ein sprachlich mißverständlicher Begriff, denn es wird ganz K überdeckt).

Eine Teilmenge K von M heißt *kompakt*, wenn K bezüglich der auf K induzierten Metrik selbst ein metrischer Raum ist.

Man beachte, daß in der Definition weit mehr verlangt wird als die Existenz einer endlichen Überdeckung – diese gibt es ja trivialerweise immer.

Wir beobachten zunächst, daß wir die kompakten Teilmengen von M auch folgendermaßen charakterisieren können: Zu jeder Familie $(U_i)_{i \in I}$ offener Teilmengen von M mit $K \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ gibt es endlich viele Indizes i_1, \dots, i_k mit $K \subset \bigcup_{j=1}^k U_{i_j}$. Wir nennen in dieser Situation $(U_i)_{i \in I}$ natürlich auch eine offene Überdeckung von M . (Vergleiche dazu Satz 1.7.)

Die kompakten Teilmengen des \mathbb{R}^n lassen sich „leicht“ charakterisieren:

Satz 3.1. *Eine Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist. (Satz von Heine-Borel).*

Beweis. \Rightarrow : Wir zeigen zunächst, daß eine kompakte Menge K beschränkt ist. Im Fall $K = \emptyset$ ist nichts zu beweisen. Andernfalls wählen wir $x \in K$ und die offene Überdeckung

$$K \subset \bigcup_{\varepsilon > 0} U_\varepsilon(x).$$

Nach Voraussetzung gibt es $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k > 0$ mit $K \subset \bigcup_{j=1}^k U_{\varepsilon_j}(x)$. Dann ist aber schon $K \subset U_\delta(x)$ mit $\delta = \max(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$. Somit ist K beschränkt mit Durchmesser $\leq 2\delta$.

Wir nehmen nun an, K sei nicht abgeschlossen. Dann besitzt K einen Randpunkt $y \notin K$. Natürlich wird K von

$$\bigcup_{x \in K} U_{d(x,y)/2}(x)$$

überdeckt. Da K kompakt ist, existieren $x_1, \dots, x_k \in K$ mit

$$K \subset \bigcup_{j=1}^k U_{d(x_j,y)/2}(x_j).$$

Sei $\varepsilon = \min\{d(x_j, y)/2 : j = 1, \dots, k\}$. Da y Randpunkt von K ist, gibt es ein $z \in K$ mit $z \in U_\varepsilon(y)$. Andererseits ist $z \notin U_{d(x_j,y)/2}(x_j)$ für alle j . Widerspruch.

Man beachte, daß der gerade abgeschlossene Teil des Beweises ganz allgemein auf metrische Räume anwendbar ist (weil ohne Ausnutzung spezieller Eigenschaften von \mathbb{R}^n geführt worden). Er zeigt dann, daß kompakte Mengen abgeschlossen sind und endlichen Durchmesser haben. Die Umkehrung ist im allgemeinen nicht richtig. Um sie aber für den \mathbb{R}^n zu beweisen, leiten wir zunächst folgenden Satz her:

Satz 3.2. *Sei M ein kompakter metrischer Raum. Eine Teilmenge K von M ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen ist.*

Beweis. Daß kompakte Teilmengen abgeschlossen sein müssen, haben wir gerade schon gesehen. Für die Umkehrung sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von K und $V = M \setminus K$. Dann überdecken die U_i und V ganz M und sicherlich auch K . Also können wir eine endliche Teilüberdeckung von K auswählen. Die zu ihr gehörenden U_i überdecken dann K , denn $V \cap K = \emptyset$, und V kann zur Überdeckung von K nichts beitragen. \square

Wir setzen nun den Beweis von Satz 3.2 fort. Sei also $K \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und beschränkt. Dann gibt es ein $C > 0$ derart, daß K im abgeschlossenen Quader

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_i| \leq C\}$$

enthalten ist. Satz 3.2 zeigt, daß wir nur die Kompaktheit von Q zu zeigen brauchen.

Wir nehmen an, Q sei nicht kompakt. Durch Kantenhalbierung unterteilen wir Q nun in 2^n Teilquader. Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von Q , die keine endliche Teilüberdeckung enthält. Dann existiert mindestens ein Teilquader Q_1 , der ebenfalls nicht durch endlich viele der U_i überdeckt werden kann – sonst könnten

wir ja eine endliche Überdeckung von Q aus denen der endlich vielen Teilquader zusammensetzen.

Nun unterteilen wir Q_1 analog durch Kantenhalbierung und wenden diese Überlegung auf Q_1 an usw. Es ergibt sich also eine Folge

$$Q = Q_0 \supset Q_1 \supset Q_2 \supset \dots$$

von abgeschlossenen Quadern mit

$$\text{diam}(Q_j) \leq \frac{C \cdot \sqrt{n}}{2^j}.$$

Also ist $\lim_{i \rightarrow \infty} \text{diam}(Q_i) = 0$, und nach dem Schachtelungssatz und wegen der Vollständigkeit von \mathbb{R}^n existiert ein

$$y \in \bigcap_{j=0}^{\infty} Q_j.$$

Aus der Überdeckung wählen wir nun eine offene Menge U_i mit $y \in U_i$. Diese enthält eine ε -Umgebung $U_\varepsilon(y)$ für ein $\varepsilon > 0$. Für hinreichend großes j ist dann aber $Q_j \subset U_\varepsilon(y)$ – und Q_j durch endlich viele der U_i überdeckt. Widerspruch! \square

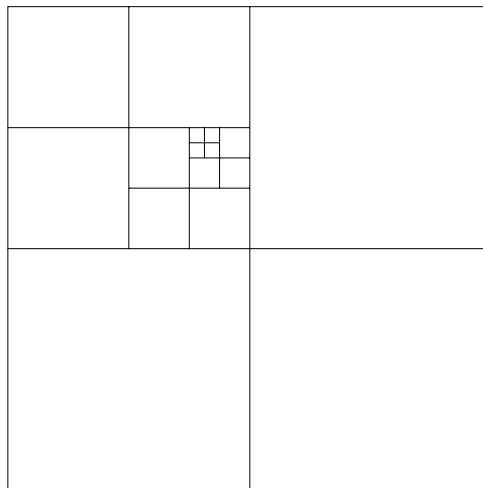


ABBILDUNG 1. Schachtelung der Q_j

Man kann zeigen, daß jede Teilfolge (x_k) in einer kompakten Teilmenge K eines metrischen Raumes eine Teilfolge besitzt, die gegen einen Punkt von K konvergiert (s. Übungsaufgabe). Wir beweisen dies jetzt für den \mathbb{R}^n zusammen mit der Umkehrung, die aber auch in beliebigem metrischen Räumen richtig ist:

Satz 3.3. *Eine Teilmenge K des \mathbb{R}^n ist genau dann kompakt, wenn jede Folge in K eine gegen einen Punkt von K konvergente Teilfolge besitzt.*

Beweis. \Leftarrow : Wenn K nicht beschränkt ist, gibt es offensichtlich eine Folge in K , die keine konvergente Teilfolge besitzt. Wenn K nicht abgeschlossen ist, gibt es einen Randpunkt y von K mit $y \notin K$ und $\lim x_k = y$ für eine Folge (x_k) in K . Jede Teilfolge von (x_k) konvergiert ebenfalls gegen y , also nicht gegen einen Punkt von K .

\Rightarrow : Sei (x_k) eine Folge in K . Dann ist (x_k) eine beschränkte Folge, speziell ist auch die Folge der ersten Komponenten (x_{k1}) in \mathbb{R} beschränkt. Also können wir nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß für \mathbb{R} aus (x_k) eine Teilfolge auswählen, für die die ersten Komponenten der Glieder konvergieren. Induktiv fortschreitend finden wir schließlich eine Teilfolge von (x_k) , für die alle Komponentenfolgen konvergieren, und damit die Teilfolge selbst. Ihr Grenzwert muß zu K gehören, da K abgeschlossen ist. \square

Man beachte, daß Satz 3.3 unabhängig von 3.2 wird, wenn man in ihm „kompakt“ durch „abgeschlossen und beschränkt“ ersetzt. Das Bemerkenswerte an 3.2 ist eben, daß abgeschlossene beschränkte Mengen kompakt im Sinne der Definition dieses Begriffs sind. Aus 3.3 ergibt sich unmittelbar die

Folgerung 3.4. *Jede beschränkte Folge (x_k) im \mathbb{R}^n besitzt eine konvergente Teilfolge.*

Die Folge (x_k) ist ja in einem kompakten Quader enthalten.

Der Satz vom globalen Maximum und Minimum einer stetigen Funktion auf einem abgeschlossenen beschränkten Teilintervall läßt sich weitreichend verallgemeinern:

Satz 3.5. *Sei M ein kompakter metrischer Raum und $f : M \rightarrow N$ eine stetige Abbildung von M in den metrischen Raum N . Dann ist auch $f(M)$ kompakt.*

Beweis. Wir setzen $B = f(M)$. Sei $(V_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von B und $U_i = f^{-1}(V_i)$ für alle i . Dann bilden die U_i eine offene Überdeckung von M , aus der wir eine endliche Überdeckung U_{i_1}, \dots, U_{i_k} auswählen können. Offensichtlich überdecken V_{i_1}, \dots, V_{i_k} dann B . \square

Für die Existenz globaler Minima und Maxima von Funktionen erhalten wir dann

Folgerung 3.6. *Sei M ein metrischer Raum, $K \neq \emptyset$ eine kompakte Teilmenge von M und $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gibt es $y, z \in K$ mit*

$$f(y) \leq f(x) \leq f(z)$$

für alle $x \in K$.

Beweis. Nach 3.5 und 3.1 ist $B = f(K)$ abgeschlossen und beschränkt. Infimum und Supremum von B existieren, weil B nicht leer und beschränkt ist. Sie gehören

zu B , weil B abgeschlossen ist, denn es gibt in B Folgen (x_k) und (y_k) die gegen $\sup B$ bzw. $\inf B$ konvergieren (Übungsaufgabe der Analysis I). \square

Nun ist noch der Zwischenwertsatz zu verallgemeinern. Die ihm zugrunde liegende Eigenschaft von Intervallen ist deren „Zusammenhang“:

Definition. Ein metrischer Raum M heißt *zusammenhängend*, wenn es keine offenen, nicht leeren Teilmengen U_1 und U_2 von M gibt mit

$$M = U_1 \cup U_2, \quad U_1 \cap U_2 = \emptyset.$$

Eine Teilmenge Z eines metrischen Raumes M heißt *zusammenhängend*, wenn Z bezüglich der von M auf Z induzierten Metrik ein zusammenhängender Raum ist.

In Analogie zur Kompaktheit können wir den Zusammenhang von Z auch so beschreiben: es gibt keine offenen Teilmengen U_1, U_2 von M mit

$$Z \cap U_1 \cap U_2 = \emptyset, \quad Z \not\subset U_1, \quad Z \not\subset U_2, \quad \text{aber } Z \subset U_1 \cup U_2.$$

Wir beschreiben zunächst die zusammenhängenden Teilmengen von \mathbb{R} :

Satz 3.7. *Eine Teilmenge I von \mathbb{R} ist genau dann zusammenhängend, wenn sie ein Intervall ist.*

Beweis. \Leftarrow : Sei J ein Intervall. Wir nehmen an, J sei nicht zusammenhängend, also $J \subset U_1 \cup U_2$, $J \cap U_1 \cap U_2 = \emptyset$, $J \not\subset U_1$, $J \not\subset U_2$ für offene Teilmengen U_1, U_2 von \mathbb{R} . Wir wählen $a \in J \cap U_1$, $b \in J \cap U_2$ und dürfen dann $a < b$ annehmen. Sei

$$z = \sup\{x \in J : x \geq a, x \in J \cap U_1\}.$$

Da $a \leq z \leq b$ gilt, ist $z \in J$.

Im Fall $z = b$ ist $z \in U_2$ und U_2 enthält eine ε -Umgebung $U_\varepsilon(b)$; diese ist disjunkt zu U_1 . Also können Punkte von U_1 nicht beliebig nahe bei z liegen – ein Widerspruch zur Wahl von z .

Im Fall $z = a$ ist $z \in U_1$ und U_1 enthält eine ε -Umgebung von z . Dann gibt es aber Zahlen y mit $a < y < b$ und $y \in U_\varepsilon(a)$. Dies ist wiederum ein Widerspruch zur Wahl von z .

Nun bleibt nur noch die Möglichkeit $a < z < b$, und auch diese führt auf einen Widerspruch, wie man mit ähnlichen Argumenten sieht.

\Rightarrow : Wenn J kein Intervall ist, existiert ein $z \in \mathbb{R}$ mit $z \notin J$, aber

$$U_1 =]-\infty, z[\cap J \neq \emptyset \quad \text{und} \quad U_2 =]z, \infty[\cap J \neq \emptyset.$$

Also ist J nicht zusammenhängend. \square

Wir haben bei diesem Beweis ausgenutzt, daß die Intervalle in \mathbb{R} genau diejenigen Teilmengen sind, die mit je zwei Punkten x und y auch alle Punkte zwischen x und y enthalten.

Die Verallgemeinerung des Zwischenwertsatzes lautet nun so:

Satz 3.8. *Sei M ein zusammenhängender metrischer Raum und $f : M \rightarrow N$ eine stetige Abbildung in einem metrischen Raum N . Dann ist auch $f(Z)$ zusammenhängend.*

Beweis. Wenn V_1, V_2 offene Mengen in N sind mit $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $V_1 \cap f(Z) \neq \emptyset$, $V_2 \cap f(Z) \neq \emptyset$, $f(Z) \subset V_1 \cup V_2$, so „zerlegen“ $U_1 = f^{-1}(V_1)$ und $U_2 = f^{-1}(V_2)$ den Raum M , der dann nicht zusammenhängend sein kann. \square

Folgerung 3.9. *Sei M ein metrischer Raum, Z eine zusammenhängende Teilmenge von M und $f : Z \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist $f(Z)$ ein Intervall.*

Dies folgt sofort aus 3.7 und 3.8.

Zusammenhängende Teilmengen des \mathbb{R}^n lassen sich leider nicht so einfach charakterisieren wie die kompakten. Eine große Klasse zusammenhängender Mengen kann man jedoch mittels Wegen beschreiben:

Definition. Ein Weg in einem metrischen Raum M ist eine stetige Abbildung $f : [a, b] \rightarrow M$ von einem nichtleeren abgeschlossenen kompakten Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ nach M . Man nennt dann $f(a)$ den Anfangs- und $f(b)$ den Endpunkt von f und sagt, daß der Weg f die Punkte a und b verbindet.

Ein metrischer Raum M heißt *wegzusammenhängend*, falls sich je zwei Punkte in M durch einen Weg verbinden lassen.

Beachte: Wenn $f : [a, b] \rightarrow M$ ein Weg mit Anfangspunkt x und Endpunkt y ist, so ist $g : [a, b] \rightarrow M$, $g(t) = f(a + b - t)$, ein Weg mit Endpunkt x und Anfangspunkt y .

Allgemeiner soll jede stetige Abbildung eines Intervalls I in einen metrischen Raum M ein Weg in M genannt werden. Statt Weg sagt man auch *Kurve*. Achtung: Man muß unterscheiden zwischen dem Weg $f : I \rightarrow M$ und der *Trajektorie* oder *Spur* $f(I)$!

Satz 3.10. *Eine wegzusammenhängender metrischer Raum M ist zusammenhängend.*

Beweis. Wir nehmen an, M werde durch U_1 und U_2 zerlegt. Dann existieren $x \in U_1$ und $y \in U_2$, und für einen Weg $f : [a, b] \rightarrow Z$ mit Anfangspunkt x und Endpunkt y wird dann auch $f([a, b])$ durch U_1 und U_2 zerlegt, im Widerspruch zu 3.8. \square

Zusammenhängende Teilmengen des \mathbb{R}^n brauchen für $n \geq 2$ nicht wegzusammenhängend zu sein. Offene zusammenhängende Teilmengen des \mathbb{R}^n sind aber auch wegzusammenhängend, wie man leicht zeigen kann.

ABSCHNITT 4

Wege und ihre Längen

Nach den relativ abstrakten ersten drei Abschnitten wollen wir uns nun einem konkreten Problem zuwenden, nämlich der Definition und Berechnung der Länge eines Weges. Der Begriff „Weg“ ist ja schon in Abschnitt 3 eingeführt worden.

Nicht jedem Weg $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ läßt sich sinnvoll eine Länge zuordnen. Zum Beispiel gibt es eine stetige surjektive Abbildung $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$! Deshalb müssen wir die Klasse von Wegen beschränken.

Definition. Ein Weg $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $I = [a, b]$ heißt *stetig differenzierbar*, falls alle Komponenten von f stetig differenzierbare Funktionen $f_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ sind. Der Weg f heißt *stückweise stetig differenzierbar*, falls es $t_1, \dots, t_m \in [a, b]$ gibt, für die Einschränkungen von f auf $[a, t_1]$, $[t_1, t_2]$, \dots , $[t_m, b]$ stetig differenzierbar sind.

Beispiele 4.1. (a) Sei $I = [0, 2\pi]$. Dann durchläuft $f(t)$ für

$$f(t) = (r \cdot \cos t, r \cdot \sin t) \quad (r > 0)$$

den Kreis mit Radius r und Mittelpunkt 0. (Aus den Sätzen über trigonometrische Funktionen folgt leicht, daß $f([0, 2\pi]) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = r^2\}$.)

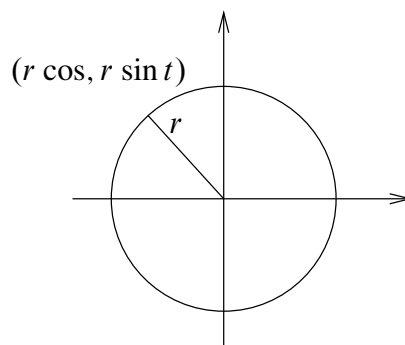


ABBILDUNG 1. Umlaufung des Kreises

(b) Sei $I = [0, 4]$. Wir setzen

$$f(t) = \begin{cases} [t, 0], & t \in [0, 1], \\ [1, t - 1], & t \in [1, 2], \\ [3 - t, 1], & t \in [2, 3], \\ [0, 4 - t], & t \in [3, 4]. \end{cases}$$

Dann umläuft der Weg f gerade den Rand eines Quadrats:

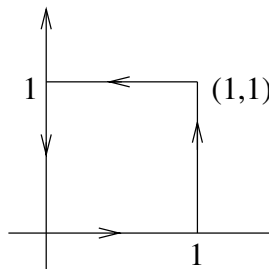


ABBILDUNG 2. Umlaufung eines Quadrats

(c) Der Weg

$$f(t) = (\cos t, \sin t, t), \quad t \in [a, b],$$

ist eine *Schraubenlinie* in \mathbb{R}^3 .

(d) Bereits bei den Beispielen (a) und (b) ist f als Abbildung nicht injektiv. Wenn $f(t_1) = f(t_2)$ ist und t_1 und t_2 nicht beide Randpunkte von $[a, b]$ sind, nennt man $f(t_1) = f(t_2)$ einen *Doppelpunkt* von f . Ein typisches Beispiel eines Doppelpunktes weist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(t) = (t^2 - 1, t^3 - t)$, auf:

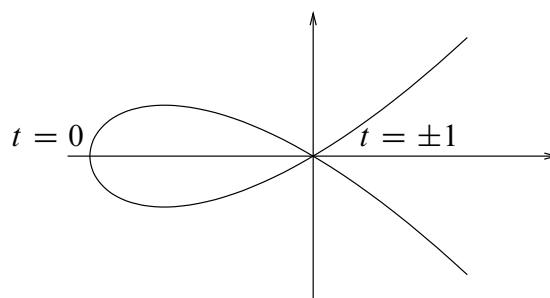


ABBILDUNG 3. Kurve mit Doppelpunkt

Definition. Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein (stetig) differenzierbarer Weg. Dann heißt

$$f'(t) = (f'_1(t), \dots, f'_n(t))$$

der *Tangentialvektor* von f in t (oder auch *Ableitung* von f in t).

Wir haben die Steigung der Graphen einer Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ als Grenzwert der Sekantensteigungen interpretiert. Durch komponentenweise Betrachtung ergibt sich für einen Weg analog

$$f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}.$$

Wege spielen als Bahnen von physikalischen Objekten eine wichtige Rolle in der Physik und zum Beispiel auch in der Astronomie. In diesem Fall ist

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

die *mittlere Geschwindigkeit* im Zeitintervall $[t, t+h]$ bzw. $[t+h, t]$, während $f'(t)$ die (*Momentan-*) *Geschwindigkeit* zur Zeit ist. Diese Interpretation ist durch die folgende Definition und Berechnung der Weglänge gerechtfertigt.

Definition. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei ein stückweise stetig differenzierbarer Weg. Für eine Zerlegung $Z = (t_0, \dots, t_m)$, $t_0 = a$, $t_m = b$, von $[a, b]$ setzen wir

$$L(Z, f) = \sum_{i=1}^m \|f(t_i) - f(t_{i-1})\|$$

und bezeichnen

$$L(f) = \sup\{L(Z, f) : Z \text{ Zerlegung von } [a, b]\}$$

als *Länge* von f .

Wir werden gleich sehen, daß ein stückweise stetig differenzierbarer Weg eine endliche Länge hat. Die Definition läßt sich natürlich auch auf allgemeinere Wege anwenden. Ein lediglich stetiger Weg braucht aber keine (endliche) Länge zu besitzen. (Wege endlicher Länge heißen *rektifizierbar*.)

Hinter der Definition steht natürlich die Idee, f durch einen *Polygonzug* zu approximieren und die Länge von f als Supremum der Längen aller dieser Polygonzüge anzusehen.

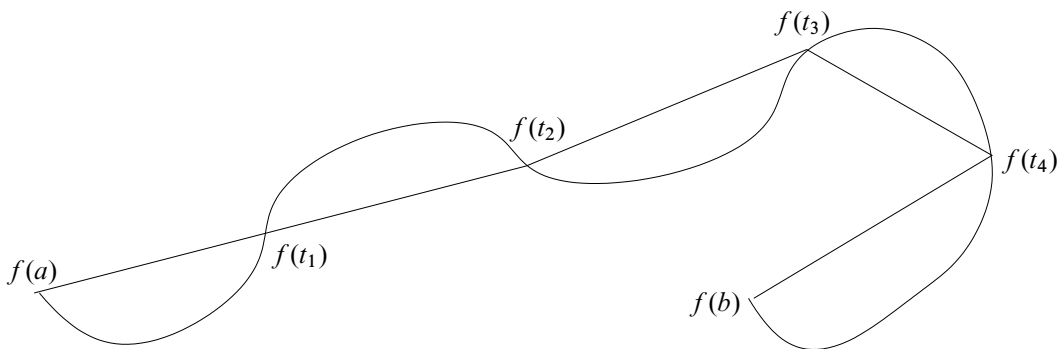


ABBILDUNG 4. Approximation durch einen Polygonzug

Zunächst einmal wollen wir uns überlegen, daß die Weglänge additiv ist. Dabei ist die Endlichkeit von $L(f)$ unwesentlich.

Satz 4.2. Seien $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $g : [b, c] \rightarrow \mathbb{R}^n$ stückweise stetig diffbare Wege mit $f(b) = g(b)$. Dann gilt für $h : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$h(t) = \begin{cases} f(t), & t \in [a, b], \\ g(t), & t \in [b, c], \end{cases}$$

daß $L(h) = L(f) + L(g)$ ist.

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall, daß $L(f)$ und $L(g)$ endlich sind. Sei $Z = (t_0, \dots, t_m)$ eine Zerlegung von $[a, c]$. Falls $t_i \neq b$ ist für alle b , „verfeinern“ wir Z zu Z' durch Hinzunahme von b und erhalten dann offensichtlich

$$L(Z, f) \leq L(Z', f).$$

Bei der Bestimmung von $L(h)$ brauchen wir also nur Zerlegungen Z von $[a, c]$ zu betrachten, in denen b vorkommt. Dann zerfällt Z in Zerlegungen Z_1 von $[a, b]$ und Z_2 von $[b, c]$ und es gilt

$$L(f, Z_1) + L(g, Z_2) = L(h, Z) \leq L(f) + L(g). \quad (*)$$

Umgekehrt können wir aus solchen Zerlegungen Z_1 und Z_2 eine Zerlegung Z von $[a, c]$ zusammensetzen, und wenn

$$L(f) - \varepsilon < L(f, Z_1) \quad \text{und} \quad L(g) - \varepsilon < L(g, Z_2)$$

für $\varepsilon > 0$ ist, folgt

$$L(f) + L(g) - 2\varepsilon < L(h, Z). \quad (**)$$

Zusammen ergeben (*) und (**) die Behauptung.

Falls etwa $L(f) = \infty$ ist, können wir zu jedem $C \in \mathbb{R}$ eine Zerlegung von $[a, b]$ finden, so daß $L(Z, f) > C$. Für die Zerlegung $Z' = Z \cup \{c\}$ on $[a, c]$ ist dann auch $L(Z', h) > C$, so daß $L(h) = \infty$. \square

Die Definition der Länge erinnert uns an die des Integrals und daher sollte die Länge vielleicht als Integral berechenbar sein. Dies ist auch der Fall. Zunächst einmal führen wir vektorwertige Integrale ein:

Definition. Seien $f_1, \dots, f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen und $f = (f_1, \dots, f_n)$ die Abbildung $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit den Komponenten f_i . Dann setzen wir

$$\int_a^b f(x) dx = \left(\int_a^b f_1(x) dx, \dots, \int_a^b f_n(x) dx \right).$$

Wir benötigen eine „Dreiecksungleichung“ für Integrale. Sie gilt für alle Normen, wir beschränken uns aber auf die euklidische Norm.

Satz 4.3. *Unter den Voraussetzungen der Definition ist*

$$\left\| \int_a^b f(x) dx \right\| \leq \int_a^b \|f(x)\| dx.$$

Beweis. Sei $y = \int_a^b f(x) dx \in \mathbb{R}^n$. Wir benutzen das Standardskalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf dem \mathbb{R}^n . Es gilt

$$\begin{aligned} \|y\|^2 &= \left\langle \int_a^b f(x) dx, y \right\rangle \stackrel{(+)}{=} \int_a^b \langle f(x), y \rangle dx \leq \int_a^b \|f(x)\| \|y\| dx \\ &= \|y\| \int_a^b \|f(x)\| dx. \end{aligned}$$

Die Gleichung (+) ist leicht nachzurechnen:

$$\left\langle \int_a^b f(x) dx, y \right\rangle = \sum_{i=1}^n y_i \int_a^b f_i(x) dx = \int_a^b \sum_{i=1}^n y_i f_i(x) dx. \quad \square$$

Damit können wir beweisen:

Satz 4.4. *Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbarer Weg. Dann ist*

$$L(Z, f) \leq \int_a^b \|f'(t)\| dt$$

für alle Zerlegungen Z von $[a, b]$ und

$$L(f) = \int_a^b \|f'(t)\| dt.$$

Physikalische Interpretation: Man erhält die Länge des zurückgelegten Weges durch Integration der Momentangeschwindigkeit.

Beweis. Sei $Z = (t_0, \dots, t_m)$ eine Zerlegung von $[a, b]$. Dann ist

$$\begin{aligned} \|f(t_i) - f(t_{i-1})\| &= \|(f_1(t_i) - f_1(t_{i-1}), \dots, f_n(t_i) - f_n(t_{i-1}))\| \\ &= \left\| \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} f_1'(t) dt, \dots, \int_{t_{i-1}}^{t_i} f_n'(t) dt \right) \right\| = \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} f'(t) dt \right\| \\ &\leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|f'(t)\| dt. \end{aligned}$$

Durch Aufsummieren über die Teilintervalle ergibt sich die behauptete Ungleichung. Es folgt $L(f) \leq \int_a^b \|f'(t)\| dt$, was wir im folgenden nutzen werden.

Wir setzen nun

$$s(t) = L(f | [a, t]) \quad \text{für } t \in [a, b].$$

Dies definiert eine Funktion $s : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, denn $L(f | [a, b])$ ist nach dem bereits Bewiesenen endlich. Es genügt zu zeigen, daß s differenzierbar ist mit $s' = \|f'\|$.

Sei $u \in [a, b]$. Dann ist für $u > t$

$$\left\| \frac{f(u) - f(t)}{u - t} \right\| \leq \frac{L(f | [t, u])}{u - t} = \frac{s(u) - s(t)}{u - t} \leq \|f'(\tau)\|, \quad (*)$$

wobei τ zwischen t und u liegt. Für die Ungleichung ganz rechts nutzen wir aus, daß – wie schon bewiesen und nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung –

$$s(u) - s(t) \leq \int_t^u \|f'(w)\| dw = (u - t) \|f'(\tau)\|.$$

Für $u \rightarrow t$ erhält man in (*) ganz links und ganz rechts den Grenzwert $\|f'(t)\|$. Für $u < t$ gilt eine analoge Ungleichungskette. Mithin ist $s'(t) = \|f'(t)\|$, wie behauptet. \square

Beispiel 4.5. Zur Berechnung der Weglänge:

- (a) $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f(t) = (1 - t)y + tz$, $y, z \in \mathbb{R}^n$, verbindet y und z längs der Gerade durch y und z . Es gilt

$$L(f) = \int_0^1 \|f'(t)\| dt = \int_0^1 \|z - y\| dt = \|z - y\|$$

Die Länge von f ist also der Abstand von y und z – keine Überraschung.

- (b) $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(t) = (\cos t, \sin t)$. Für $T \in [0, 2\pi]$ ist

$$L(f | [0, T]) = \int_0^T \|f'(t)\| dt = \int_0^T 1 dt = T$$

Zum Endpunkt $(\cos T, \sin T)$ gehört also die Weglänge T des von $(1, 0)$ aus einfach durchlaufenen Kreisbogens. Damit ist nun endgültig die Verbindung zwischen unserer Definition der trigonometrischen Funktionen mit deren Beschreibung in der Elementargeometrie hergestellt.

Weitere Beispiele werden in den Übungsaufgaben behandelt.

An dieser Stelle könnten wir zahlreiche geometrische und physikalische Begriffsbildungen behandeln, z.B. den Schnittwinkel zweier Wege, die Windungszahl eines Weges bezüglich eines Punktes, die Winkelgeschwindigkeit usw. Wir verweisen dazu auf die Literatur. Besprechen wollen wir noch die Parametertransformationen:

Definition. Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Weg, $J \subset \mathbb{R}$ ebenfalls ein Intervall und $\varphi : J \rightarrow I$ eine bijektive stetige Abbildung. Wir sagen dann, daß der Weg $f \circ \varphi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch die *Parametertransformation* φ aus f hervorgeht.

Wir wissen, daß φ entweder streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist. Im ersten Fall heißt φ *orientierungserhaltend*, im zweiten Fall *orientierungsumkehrend*. Wenn sowohl φ als auch φ^{-1} stetig differenzierbar sind, ist φ eine C^1 -Parametertransformation. Viele Eigenschaften eines Weges sind invariant unter Parametertransformationen, z.B. die Länge. Dies folgt sofort daraus, daß zur Bestimmung der Längen von f und $f \circ \varphi$ die gleichen Polygonzüge verwendet werden.

Bei C^1 -Parametertransformationen kann man die Erhaltung der Länge auch aus Eigenschaften des Integrals ableiten. Sei φ etwa orientierungsumkehrend, $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$, $\varphi(\alpha) = b$, $\varphi(\beta) = a$, $\varphi' < 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} \|(f \circ \varphi)'(\tau)\| d\tau &= \int_{\alpha}^{\beta} \|(f' \circ \varphi)(\tau)\varphi'(\tau)\| d\tau = \int_{\alpha}^{\beta} |\varphi'(\tau)| \|(f' \circ \varphi)(\tau)\| d\tau \\ &= - \int_{\alpha}^{\beta} \varphi'(\tau) \|(f' \circ \varphi)(\tau)\| d\tau = \int_{\beta}^{\alpha} \varphi'(\tau) \|(f' \circ \varphi)(\tau)\| d\tau \\ &= \int_a^b \|g'(t)\| dt, \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichung die Substitutionsregel benutzt.

ABSCHNITT 5

Differenzierbarkeit von Abbildungen

In diesem Abschnitt spielt die Matrizenrechnung eine wichtige Rolle. Für ihre Zwecke betrachten wir Vektoren als Spaltenvektoren, wenn wir sie sonst auch oft (aus Bequemlichkeit und alter Gewohnheit) als Zeilenvektoren notieren.

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir nehmen an, f sei in $x_0 \in I$ differenzierbar und schreiben

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + g(x) \quad (*)$$

mit dem Restglied $g(x)$. Dann ist

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x) = 0. \quad (**)$$

Wir können dies auch so ausdrücken: f ist in x_0 durch $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ linear approximierbar (diese Funktion ist ja affin-linear), denn der „Fehler“ $g(x)$ geht schneller gegen 0 als die Differenz $x - x_0$. Umgekehrt sieht man sofort, daß eine Funktion f mit einer Darstellung (*), die der Bedingung (**) genügt, in x_0 differenzierbar ist.

Es ist zweckmäßig, die Differenzierbarkeit von Abbildungen, die auf einer Teilmenge des \mathbb{R}^n definiert sind, auf diesen Begriff der linearen Approximierbarkeit zu stützen:

Definition. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Abbildung. Man nennt f im Punkt $a \in U$ *differenzierbar*, falls eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ existiert, für die

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - (f(a) + L(x - a))}{\|x - a\|} = 0$$

ist. Wir nennen L die *Ableitung* von f in a oder das (*totale*) *Differential* von f in a . Wir bezeichnen es mit

$$\frac{df}{dx}(a) \quad \text{oder} \quad Df(a).$$

(Daß L eindeutig bestimmt ist, werden wir später zwanglos einsehen.)

Anmerkung.

- (a) Im Fall $m = n = 1$ ist die lineare Abbildung L die Multiplikation mit $f'(a)$. Da jede lineare Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch die Multiplikation mit

- einer Konstanten $\lambda \in \mathbb{R}$ gegeben ist, ist diese Identifikation von L mit $f'(a)$ zulässig.
- (b) Wir könnten eine größere Klasse von Mengen als Definitionsbereich von f zulassen. Um jedoch technische Schwierigkeiten sekundärer Art zu vermeiden, setzen wir U als offen voraus.
- (c) Statt „differenzierbar“ sagt man auch „total differenzierbar“, um diesen Begriff von der noch einzuführenden partiellen Differenzierbarkeit zu unterscheiden.
- (d) Offensichtlich gilt: f ist in a genau dann differenzierbar, wenn jede Komponente von f in a differenzierbar ist. Dazu braucht man L nur in Komponenten zu zerlegen bzw. aus den Komponenten zusammensetzen.
- (e) Wie im Fall einer Veränderlichen, können wir auch hier die Differenzierbarkeit geometrisch interpretieren. Sei der Einfachheit halber $m = 1$. Dann ist Γ_f (der Graph von f) eine Teilmenge in $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ und der Graph von

$$T(x) = f(a) + Df(a)(x - a)$$

die „Tangentialhyperebene“ von Γ_f im Punkt $(a, f(a))$. Dabei sollte man sich Γ_f als Oberfläche eines „Gebirges“ über \mathbb{R}^n darstellen.

- (f) Wie bei einer Veränderlichen ist auch hier die Differenzierbarkeit eine *lokale* Eigenschaft: sie hängt nur vom Verhalten von f in einer (beliebig kleinen) Umgebung von a ab.

Satz 5.1. *Wenn f in a differenzierbar ist, so ist f in a auch stetig.*

Beweis. Es ist

$$f(x) = f(a) + L(x - a) + g(x)$$

wobei $\lim_{x \rightarrow a} (g(x))/\|x - a\| = 0$ und $g(a) = 0$. Da

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} \|x - a\| \cdot \frac{g(x)}{\|x - a\|} = 0$$

ist, ist f Summe von drei in a stetigen Abbildungen. □

Für Funktionen und Abbildungen einer Veränderlichen stimmt unsere Definition von Differenzierbarkeit mit den bereits vorhandenen überein. Insofern haben wir natürlich schon viele Beispiele. Weitere werden später folgen, festhalten können wir aber schon:

Beispiel 5.2. Sei $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung. Dann ist L überall differenzierbar und $DL(x) = L$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

An grundlegenden Differentialregeln können wir festhalten:

Satz 5.3. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und seien $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $h : U \rightarrow \mathbb{R}$, differenzierbar in $a \in U$. Dann gilt*

(a) $f + g$ ist differenzierbar in a und

$$D(f + g)(a) = Df(a) + Dg(a).$$

(b) Für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ ist λf differenzierbar in a und

$$D(\lambda f)(a) = \lambda Df(a).$$

(c) Auch $h \cdot f$ ist in a differenzierbar und es gilt

$$D(h \cdot f)(a) = h(a)Df(a) + Dh(a)f(a)$$

Zur Verdeutlichung formulieren wir die Rechenregel in (c) etwas ausführlicher:
Sei $L = D(h \cdot f)(a)$; dann ist für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$L(x) = h(a) \cdot (Df(a))(x) + (Dh(a))(x) \cdot f(a).$$

Dies beweist man wie im Fall einer Veränderlichen. Alternativ kann man auch die Differenzierbarkeit von $\text{add}, \text{mult} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ beweisen, deren totale Differentiale ausrechnen und dann die *Kettenregel* benutzen:

Satz 5.4. Sei $U \subset \mathbb{R}^p$ offen, $V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei differenzierbar in $a \in U$ und es gelte $f(U) \subset V$, ferner sei $g : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbar in $b = f(a)$. Dann ist $g \circ f$ in a differenzierbar und es gilt

$$D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a).$$

Beweis. Sei $L = Df(a)$, $L' = Dg(f(a))$. Dann ist

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + L(x - a) + \tilde{f}(x), \\ g(y) &= g(b) + L'(y - b) + \tilde{g}(y), \end{aligned}$$

wobei

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\tilde{f}(x)}{\|x - a\|} = 0, \quad \lim_{y \rightarrow b} \frac{\tilde{g}(y)}{\|y - b\|} = 0.$$

Durch Einsetzen erhalten wir

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(f(a) + L(x - a) + \tilde{f}(x) - b) + \tilde{g}(f(x)) \\ &= g(f(a) + L(x - a) + L'(\tilde{f}(x))) + \tilde{g}(f(x)). \end{aligned}$$

Es genügt jetzt zu zeigen, daß

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{L'(\tilde{f}(x))}{\|x - a\|} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{\tilde{g}(f(x))}{\|x - a\|} = 0.$$

Wegen der Linearität und Stetigkeit von L' ist

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{L'(\tilde{f}(x))}{\|x - a\|} = L' \left(\lim_{x \rightarrow a} \frac{\tilde{f}(x)}{\|x - a\|} \right) = L'(0) = 0.$$

Zum zweiten Grenzwert: Falls $f(x) = b$ ist, ist $\tilde{g}(f(x)) = \tilde{g}(b) = 0$. Wir können unsere Betrachtung im folgenden daher auf die $x \in U$ mit $f(x) \neq b$ beschränken. Es gilt dann

$$\frac{\tilde{g}(f(x))}{\|x - a\|} = \frac{\tilde{g}(f(x))}{\|f(x) - b\|} \cdot \frac{\|f(x) - b\|}{\|x - a\|}.$$

Für $x \rightarrow a$ geht $f(x)$ gegen b und deshalb ist

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\tilde{g}(f(x))}{\|f(x) - b\|} = 0.$$

(Beachte, daß f stetig in a ist.) Für den zweiten Faktor nutzen wir die lineare Approximierbarkeit von f noch einmal:

$$\begin{aligned} \frac{\|f(x) - f(a)\|}{\|x - a\|} &= \frac{\|L(x - a) + \tilde{f}(x)\|}{\|x - a\|} \\ &\leq \left\| L \left(\frac{x - a}{\|x - a\|} \right) \right\| + \left\| \frac{\tilde{f}(x)}{\|x - a\|} \right\|. \end{aligned}$$

Es gilt $\|(x - a)/(\|x - a\|)\| = 1$ und auf der kompakten Menge

$$\{x \in \mathbb{R}^p : \|x\| = 1\}$$

ist L beschränkt. Der zweite Summand geht gegen 0 mit $x \rightarrow a$. Also ist

$$\frac{\|f(x) - b\|}{\|x - a\|}$$

in einer Umgebung von a beschränkt und somit

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\tilde{g}(f(x))}{\|f(x) - b\|} \cdot \frac{\|f(x) - b\|}{\|x - a\|} = 0. \quad \square$$

Ein gewisser Nachteil unserer bisherigen Betrachtungen in diesem Abschnitt ist ihre Abstraktheit. Natürlich können wir mittels 5.1 und 5.3 jetzt beispielsweise die Differentiale der Polynome ausrechnen. Es ist aber zweckmäßig, die linearen Abbildungen durch ihre Matrizen (bezüglich der Standardbasen in den beteiligten Räumen) darzustellen und die Koeffizienten dieser Matrizen durch *partielle Differentiation* zu gewinnen.

Definition. Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine auf der offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ definierte Funktion und $a \in U$. Dann heißt f in a nach der i -ten Variablen *partiell differenzierbar*, wenn

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + he_i) - f(a)}{h}$$

existiert. (Beachte, daß es ein offenes Intervall I mit $0 \in I$ gibt, so daß $a + he_i \in U$ für alle $h \in I$: die Abbildung $h \mapsto a + he_i$ ist stetig, das Urbild von U unter ihr

eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^n .) Wir bezeichnen diesen Grenzwert mit

$$\partial_i f(a), \quad D_i f(a) \quad \text{oder} \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

und nennen ihn die i -te *partielle Ableitung* oder *partielle Ableitung* von f nach x_i im Punkt a . (Dabei ist $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ der i -te Vektor der Standardbasis des \mathbb{R}^n .)

Eine Abbildung $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt in a *partiell differenzierbar nach x_i* , wenn jede ihrer Komponenten f_j in a nach x_i differenzierbar ist und *partiell differenzierbar* in a , falls jede Komponente nach jeder Variablen partiell differenzierbar ist.

Durch $a + he_i$ wird mit h nur die i -te Komponente von a variiert. Insofern hängt die partielle Differenzierbarkeit nach x_i nur vom Verhalten der Funktion f auf der zur i -ten Koordinatenachse parallelen Geraden durch a ab. Mit anderen Worten: bei der Überprüfung auf partielle Differenzierbarkeit nach x_i und beim Ausrechnen von $(\partial f)/(\partial x_i)$ können wir die übrigen Komponenten als konstant ansehen und alles verwenden, was wir über Funktionen einer Veränderlichen gelernt haben.

Beispiele 5.5. (a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f(x_1, x_2) = (x_1 \cdot \sin(x_1 \cdot x_2), x_1^3 \cdot x_2^2).$$

Bei festem x_2 ist jede der Komponenten von f überall nach x_1 differenzierbar und umgekehrt. Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} &= x_1 \cdot x_2 \cos(x_1 x_2) + \sin(x_1 x_2), & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} &= x_1^2 \cdot \cos(x_1 x_2), \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} &= 3x_1^2 x_2, & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} &= 2x_1^3 x_2. \end{aligned}$$

(b) Für $x \in \mathbb{R}^n$ sei $r(x) = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$. Da $r(x) \neq 0$ für $x \neq 0$ und die Wurzelfunktion außerhalb von Null differenzierbar ist, folgt

$$\frac{\partial r}{\partial x_i}(a) = \frac{1}{2} \frac{2a_i}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}} = \frac{a_i}{r(a)}$$

für $a \neq 0$.

Definition. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Abbildung. Wenn f in a partiell differenzierbar ist, heißt

$$Jf(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

die Jacobi- oder Funktionalmatrix von f in a .

Satz 5.6. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine in a (total) differenzierbare Abbildung. Dann ist f in a auch partiell differenzierbar und $Jf(a)$ ist die Matrix des totalen Differentials $Df(a)$ (bezüglich der Standardbasen).

Beweis. Sei B die Matrix von $Df(a)$. Dann ist

$$f(a + he_j) = f(a) + B \cdot (a + he_j - a) + g(a + he_j)$$

mit

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a + he_j)}{|h|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a + he_j)}{\|a + he_j - a\|} = 0.$$

Für die i -te Komponente ergibt sich

$$f_i(a + he_j) = f_i(a) + hb_{ij} + g_i(a + he_j),$$

also

$$\frac{f_i(a + he_j) - f_i(a)}{h} = b_{ij} + \frac{g_i(a + he_j)}{h}$$

und der zweite Summand geht mit h gegen 0. □

Satz 5.6 zeigt übrigens, daß das totale Differential von f eindeutig bestimmt ist.

Wir hätten den vorangegangenen Satz noch etwas eleganter beweisen können: die partielle Differenzierbarkeit von f_i nach x_j ist nichts anderes als die Differenzierbarkeit der Komposition

$$h \mapsto a + he_j \mapsto f(a + he_j) \mapsto f_i(a + he_j).$$

die Kettenregel ergibt ihr Differential als

$$1 \mapsto e_j \mapsto Df(a)(e_j) \mapsto (Df(a)(e_j))_i.$$

Die Matrix der Komposition ist gerade das (i, j) -te Element der Matrix von $Df(a)$.

Nun ist klar, wie man totale Differentiale bestimmt: man rechnet einfach die Jacobi-Matrix mittels partieller Differentiation aus.

Die Differentiationsregeln 5.3 und 5.4 kann man nun als Regeln für das Bestimmen von Jacobi-Matrizen interpretieren. Dabei ist die Verkettung von linearen Abbildungen als Matrizenprodukt zu übersetzen und die Anwendung einer linearen Abbildung auf einen Vektor als Produkt von Matrix und Vektor. Ein Beispiel:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2, & f(x_1, x_2) &= \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 \cdot e^{x_2} \end{pmatrix}, \\ g : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}, & g(y_1, y_2) &= y_1^2 - \sin y_2, \\ h = g \circ f &: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Es gilt dann

$$\begin{aligned} Jh(a) &= Jg(f(a)) \cdot Jf(a) \\ &= \left(2(a_1 + a_2), -\cos(a_1 e^{a_2})\right) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{a_2} & a_1 e^{a_2} \end{pmatrix} \\ &= \left(2(a_1 + a_2) - e^{a_2} \cos(a_1 e^{a_2}), 2(a_1 + a_2) - a_1 e^{a_2} \cos(a_1 e^{a_2})\right). \end{aligned}$$

Die Ableitung einer differenzierbaren Abbildung können wir mittels der Jacobi-Matrix und somit mittels partieller Differentiation ermitteln. Das folgende Beispiel zeigt aber, daß man aus der partiellen Differenzierbarkeit nicht einmal auf die Stetigkeit schließen kann:

Beispiel 5.7. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist f als rationale Funktion überall (partiell) differenzierbar. In $(0, 0)$ existieren beide partiellen Ableitungen, denn auf dem Achsenkreuz verschwindet f . Dennoch ist f im Nullpunkt nicht stetig: $f(1/n, 1/n) = n^2/4$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$. (Weder f noch die partiellen Ableitungen sind in einer Umgebung des Nullpunkts beschränkt.) Es gilt aber:

Satz 5.8. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Abbildung. Wenn f auf U partiell differenzierbar ist und alle partiellen Ableitungen in $a \in U$ stetig sind, ist f in a differenzierbar.

Beweis. Wir dürfen $m = 1$ annehmen. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben mit $U_\varepsilon(a) \subset U$. Dann dürfen wir auch $U = U_\varepsilon(a)$ annehmen. Für $b \in U$ wollen wir jetzt $|f(b) - f(a)|$ abschätzen. Sei $\delta_i = b_i - a_i$, $i = 1, \dots, n$ und $c_0 = a$, $c_1 = c_0 + \delta_1 e_1, \dots, c_k = c_{k-1} + \delta_k e_k, \dots, c_n = c_{n-1} + \delta_n e_n$. Dann ist $c_n = b$. Ferner $c_k \in U$ für alle k und

$$f(b) - f(a) = \sum_{k=1}^n f(c_k) - f(c_{k-1}).$$

Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung existieren ζ_1, \dots, ζ_n mit

$$f(c_k) - f(c_{k-1}) = \delta_k \cdot \frac{\partial f}{\partial x_k}(\zeta_k).$$

(Dazu betrachtet man einfach die Beschränkung von f auf die Parallele zur k -ten Koordinatenachse durch c_k (und c_{k-1}).)

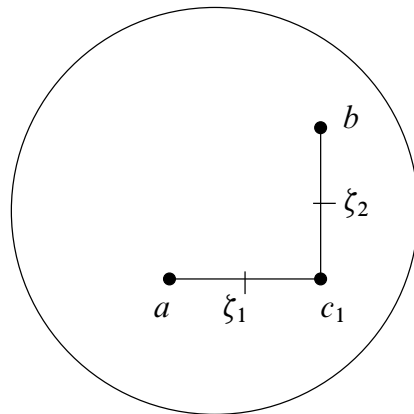


ABBILDUNG 1

Wir erhalten

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a) + \sum_{k=1}^n f(c_k) - f(c_{k-1}) = f(a) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(\zeta_k) \cdot \delta_k \\ &= f(a) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \cdot \delta_k + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}(\zeta_k) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \right) \delta_k. \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}(\zeta_k) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \right) \cdot \delta_k}{\|b - a\|} &\leq \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_k}(\zeta_k) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \right| \cdot \frac{|\delta_k|}{\|b - a\|} \\ &\leq \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_k}(\zeta_k) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \right|. \end{aligned}$$

Mit b gehen aber auch ζ_1, \dots, ζ_n gegen a , und wegen der Stetigkeit der $\partial f / \partial x_k$ in a strebt dann die Summe gegen Null. (Um dies präziser zu machen, betrachte man eine Folge (b_p) mit $\lim b_p = a$, ζ_{pk} anstelle von ζ_k usw.) \square

Definition. Eine Abbildung, die die Voraussetzungen des Satzes 5.8 erfüllt, heißt in a stetig partiell differenzierbar. Ist f in allen $a \in U$ stetig partiell differenzierbar, so nennen wir f stetig differenzierbar auf U .

Diese Terminologie ist nach Satz 5.8 durchaus gerechtfertigt. Er liefert uns die (stetige) Differenzierbarkeit sehr vieler Funktionen und Abbildungen. Den Begriff der partiellen Ableitung kann man noch etwas verallgemeinern:

Definition. $U \subset \mathbb{R}^n$ sei offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Abbildung. Man sagt, daß f in Richtung des Vektors von \mathbb{R}^n differenzierbar ist, falls der Grenzwert

$$\frac{df}{dv}(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + hv) - f(a)}{h}$$

existiert. Er heißt dann *Ableitung von f in Richtung von v* .

Die Bezeichnung „Richtungsableitung“ ist nicht ganz präzise, denn diese hängt nicht nur von der Richtung von v , die wir mit dem normierten Vektor $v/\|v\|$ identifizieren können, sondern wirklich von v ab.

Satz 5.9. *Wenn f differenzierbar in a ist, ist f in jede Richtung differenzierbar und es gilt*

$$\frac{df}{dv}(a) = (Df(a))(v).$$

Beweis. Streng genommen müssen wir die Richtungsableitung als lineare Abbildung von \mathbb{R} nach \mathbb{R}^n auffassen, die $\alpha \in \mathbb{R}$ auf den Vektor $\alpha df/dv(a)$ abbildet.

Die Richtungsableitung ist aber auch die Ableitung der Komposition $h \mapsto a + hv \mapsto f(a + hv)$. Deshalb können wir die Kettenregel anwenden. Das totale Differential der Komposition ergibt sich als lineare Abbildung $\alpha \mapsto \alpha v \mapsto \alpha(Df(a))(v)$. Damit folgt die Behauptung. \square

Im Fall $m = 1$ heißt die Transponierte der Jacobi-Matrix von $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ *Gradient von f* . Wir können den Gradienten als Element von \mathbb{R}^n betrachten.

$$\text{grad } f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Der Gradient zeigt immer in Richtung des „stärksten Anstiegs“. Da

$$(Df(a))(v) = \langle \text{grad } f(a), v \rangle$$

ist, folgt nach der Schwarzschen Ungleichung

$$(Df(a))(v) = \langle \text{grad } f(a), v \rangle \leq \|a\| \|v\| = \left\langle \text{grad } f(a), \frac{\text{grad } f(a)}{\|\text{grad } f(a)\|} \right\rangle$$

für alle Vektoren v der Norm 1. Da $(Df(a))(v)$ die Steigung in Richtung von v angibt, ist diese in Richtung des Gradienten am größten.

Zum Abschluß dieses Paragraphen wollen wir noch einen allgemeinen Mittelwertsatz und einen Schrankensatz ableiten. Beide Aussagen verallgemeinern Sätze der Analysis I.

Satz 5.10. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar. Ferner seien $a, b \in U$ Punkte, deren Verbindungsstrecke in U liegt. Mit $v = b - a$ gilt*

$$f(b) - f(a) = \left(\int_0^1 [Jf(a + tv)] dt \right) \cdot v.$$

Dabei ist das Integral über eine Matrix von Funktionen komponentenweise erklärt.

Beweis. Es genügt, dies komponentenweise nachzuprüfen. Wir dürfen also $m = 1$ annehmen. Sei $g(t) = f(a + tv)$. Dann ist für alle $t \in [0, 1]$

$$g'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + tv) \cdot v_i.$$

Denn g ist die Komposition

$$t \mapsto a + tv \mapsto f(a + tv)$$

mit den Jacobi-Matrizen

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

Also ist

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(x) dt = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + tv) \cdot v_i \right) dt \\ &= \left[\int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + tv) \cdot e_i^T \right) dt \right] \cdot v \\ &= \left[\int_0^1 Jf(a + tv) dt \right] \cdot v, \end{aligned}$$

wobei e_i^T der i -te Einheitszeilenvektor ist. □

Um den Schrankensatz knapp formulieren zu können, sollten wir nun die Norm einer Matrix einführen:

Definition. Sei A eine $m \times n$ -Matrix. Dann sei

$$\|A\| = \max\{\|Av\| : v \in \mathbb{R}^n, \|v\| = 1\}.$$

Die Definition ist sinnvoll, denn wir betrachten das Maximum einer stetigen Funktion auf einer kompakten Menge. Für alle $w \in \mathbb{R}^n$ ist dann

$$\|Aw\| \leq \|A\| \|w\|,$$

denn $\|Aw\| = \|w\| \cdot \|A \cdot (w/\|w\|)\|$ für $w \neq 0$. Mit $A = (a_{ij})$ gilt

$$\max_{i,j} |a_{ij}| \leq \|A\| \leq \sqrt{mn} \cdot \max_{i,j} |a_{ij}|.$$

Der Schrankensatz lautet nun so:

Satz 5.11. *Unter den Voraussetzungen von Satz 5.10 ist*

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \left(\sup_{t \in [0,1]} \|Jf(a + tv)\| \right) \cdot \|b - a\|.$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}\|f(b) - f(a)\| &= \left\| \left(\int_0^1 [Jf(a + tv)] dt \right) \cdot v \right\| = \left\| \int_0^1 ([Jf(a + tv)] \cdot v) dt \right\| \\ &\leq \int_0^1 \|[Jf(a + tv)] \cdot v\| dt \\ &\leq \int_0^1 \|[Jf(a + tv)]\| \cdot \|v\| dt \leq \left(\sup_{t \in [0,1]} \|Jf(a + tv)\| \right) \cdot \|v\|.\end{aligned}$$

Bei der zweiten Gleichung haben wir die Linearität des Integrals und bei der ersten Ungleichung Satz 4.3 ausgenutzt. (Da wir diesen Satz nur für die euklidische Norm bewiesen haben, müssen wir v zunächst wieder unter das Integral ziehen.) \square

ABSCHNITT 6

Parameterabhängige Integrale

Die Funktion f sei auf der Menge

$$I \times [a, b] \subset \mathbb{R}^2$$

definiert, wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist. Unter geeigneten Voraussetzungen über f kann man dann die Funktion F auf I ,

$$F(x) = \int_a^b f(x, y) dy,$$

definieren; F ist also durch ein vom „Parameter x abhängiges“ Integral gegeben. Im folgenden sollen Aussagen über Stetigkeit und Differenzierbarkeit von F hergeleitet werden. Insofern ist dieser Abschnitt eine Ergänzung zur Analysis I.

Satz 6.1. *Mit den obigen Bezeichnungen sei f stetig auf $R = I \times [a, b]$. Dann ist F stetig auf I .*

Bevor wir diesen Satz beweisen, verallgemeinern wir den Satz über die gleichmäßige Stetigkeit von stetigen Funktionen auf kompakten Intervallen:

Satz 6.2. *Seien M, N metrische Räume, $K \subset M$ kompakt und $f : K \rightarrow N$ stetig. Dann ist f gleichmäßig stetig, d.h. zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so daß*

$$d(f(x), f(y)) < \varepsilon \quad \text{für alle } x, y \in K \text{ mit } d(x, y) < \delta.$$

Man kann diesen Satz genauso beweisen, wie den in der Analysis I betrachteten Spezialfall oder das Lebesguesche Lemma benutzen (vgl. Übungsaufgabe).

Beweis von Satz 6.1. Sei $u \in I$. Für irgendein $c > 0$ betrachten wir das kompakte Rechteck

$$R' = ([u - c, u + c] \times [a, b]) \cap R.$$

Wir können dann R durch R' ersetzen, d.h. wir dürfen annehmen, R sei kompakt. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Nach 6.2 finden wir ein $\delta > 0$ mit

$$|f(u, y) - f(v, y)| < \varepsilon \quad \text{für alle } v \in [u - c, u + c] \text{ mit } |u - v| < \delta.$$

Für diese v ist dann

$$|F(u) - F(v)| = \left| \int_a^b (f(u, y) - f(v, y)) dy \right| \leq \int_a^b |f(u, y) - f(v, y)| dy < (b - a) \cdot \varepsilon. \quad \square$$

Satz 6.3. *Zusätzlich zu den Voraussetzungen von 6.1 sei f auf R nach x stetig partiell differenzierbar. Dann ist F stetig diffbar und es gilt*

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dy.$$

Man nennt diese Regel „Differentiation unter dem Integralzeichen“.

Beweis. Wie bei 6.1 dürfen wir annehmen, R sei kompakt. Sei $u \in I$. Zu jedem Punkt $(v, y) \in R$ existiert dann nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung ein $\xi(v, y)$ zwischen u und v mit

$$f(u, y) - f(v, y) = D_1 f(\xi(v, y), y) \cdot (u - v).$$

Somit ist

$$\frac{F(u) - F(v)}{u - v} - \int_a^b D_1 f(u, y) dy = \int_a^b [D_1 f(\xi(v, y), y) - D_1 f(u, y)] dy.$$

Mit dem Satz über die gleichmäßige Stetigkeit folgt aber nun wie im Beweis von 6.1, daß das Integral auf der rechten Seite mit $u \rightarrow v$ gegen 0 geht – wir haben ja vorausgesetzt, daß $D_1 f$ stetig ist. Mit 6.1 folgt nun sogar die Stetigkeit von F' . \square

Als Anwendung wollen wir nun zeigen, daß Doppelintegrale über Rechtecke von der Integrationsreihenfolge unabhängig sind, jedenfalls dann, wenn der Integrand stetig ist.

Satz 6.4. *Seien $[a, b], [c, d] \subset \mathbb{R}$ kompakte Intervalle. Die Funktion f auf $R = [a, b] \times [c, d]$ sei stetig. Dann ist*

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

Beweis. Wir ersetzen auf beiden Seiten b durch eine variable obere Grenze $z \in [a, b]$ und definieren so Funktionen G, H auf $[a, b]$. Auf der linken Seite ergibt sich

$$G(z) = \int_a^z \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

Der Integrand des äußeren Integrals ist nach 6.1 stetig. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist

$$G'(z) = \int_c^d f(z, y) dy.$$

Auf der rechten Seite ergibt sich

$$H(z) = \int_c^d \left(\int_a^z f(x, y) dx \right) dy.$$

Mittels 6.3 und dem Hauptsatz erhalten wir

$$H'(z) = \int_c^d \frac{\partial}{\partial z} \left(\int_a^z f(x, y) dx \right) dy = \int_c^d f(z, y) dy.$$

(Für die zweite Gleichung beachten wir, daß auch hier ein Integral nach der oberen Grenze zu differenzieren ist.)

Insgesamt ist $G'(z) = H'(z)$ für alle $z \in [a, b]$. Da auch noch $G(a) = H(a) = 0$ ist, gilt $G(z) = H(z)$ für alle $z \in [a, b]$. \square

Man kann 6.4 als einen allerersten Anfang der mehrdimensionalen Integrations-
theorie verstehen. Da die Reihenfolge der Integrationen keine Rolle spielt, können
wir

$$\int_R f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_u^v f(x, y) dy dx$$

setzen. Satz 6.4 läßt sich natürlich auf Integrale „höherer Vielfachheit“ ausdehnen.

ABSCHNITT 7

Höhere Ableitungen, Taylor-Formel, lokale Extrema

Wenn man zum Beispiel ein Polynom f in den Variablen x und y zunächst nach x und dann $\partial f/\partial x$ nach y ableitet, erhält man das gleiche Resultat, wie bei der Ableitung von $\partial f/\partial y$ nach x :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

Dies kann man leicht beweisen: es genügt ja, die Aussage für Monome zu verifizieren. Mit anderen Worten, es kommt auf die Reihenfolge der Variablen, nach denen sukzessiv die partiellen Ableitungen gebildet werden, nicht an. Dies gilt ganz allgemein unter sehr schwachen Voraussetzungen. Wir führen zunächst eine nützliche Sprechweise ein:

Definition. Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion auf der offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$. Sie heißt $(m + 1)$ -mal (stetig) differenzierbar, wenn sie m -mal differenzierbar ist und alle partiellen Ableitungen

$$D_{i_1} \cdots D_{i_m} f$$

m -ter Ordnung (stetig) differenzierbar sind. Eine Abbildung $g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist n -mal (stetig) differenzierbar, wenn dies für ihre Komponenten gilt.

Satz 7.1. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt für alle $i, j, 1 \leq i, j \leq n$, und alle $a \in U$:

$$D_i D_j f(a) = D_j D_i f(a).$$

Beweis. Linke wie rechte Seite hängen nur von der Einschränkung von f auf die Menge

$$U \cap \{a + \lambda e_i + \mu e_j : (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

ab. Wir können daher f durch die Funktion

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(\lambda, \mu) = f(a + \lambda e_i + \mu e_j),$$

und a durch $0 \in \mathbb{R}^2$ ersetzen, es gilt ja

$$D_1 D_2 g(0) = D_i D_j f(a) \text{ und } D_2 D_1 g(0) = D_j D_i f(a).$$

An die Stelle von U tritt

$$U' = \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 : a + \lambda e_i + \mu e_j \in U\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Mit anderen Worten: Wir dürfen annehmen, daß $n = 2$ und $a = 0 \in \mathbb{R}^2$ ist. Für die Koordinaten im \mathbb{R}^2 schreiben wir x und y .

Die Umgebung U von 0 enthält einen Quader

$$Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x|, |y| < \delta\}.$$

Nach Verkleinerung von U können wir $U = Q$ annehmen. Mit (x, y) enthält U dann auch das Rechteck $R(x, y)$ mit den Ecken $(0, 0)$, $(x, 0)$, $(0, y)$ und (x, y) .

Durch zweimalige Anwendung der Definition der Ableitung als Grenzwert von Differenzenquotienten erhalten wir:

$$\begin{aligned} D_1 D_2 f(0, 0) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(s, t) - f(s, 0)}{t} - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t}}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(s, t) - f(s, 0) - f(0, t) + f(0, 0)}{st} \quad (*) \end{aligned}$$

Sei $\Delta(x, y)$ der Zähler auf der rechten Seite von (*). Es genügt zu zeigen: Es gibt $(\xi, \eta) \in R(x, y)$ mit $\Delta(x, y) = xy \cdot D_2 D_1 f(\xi, \eta)$. Wegen der Stetigkeit von $D_2 D_1 f$ in $(0, 0)$ ergibt sich als Grenzwert dann $D_2 D_1 f(0, 0)$, und dies war zu zeigen.

Dazu setzen wir für $(x, y) \in U$

$$F_y(x) = f(x, y) - f(x, 0).$$

Diese Funktion ist (bei festem y) differenzierbar. Also existiert ein ξ zwischen 0 und x mit

$$\Delta(x, y) = F_y(x) - F_y(0) = x \cdot F'_y(\xi);$$

wir wenden dabei den Mittelwertsatz auf F_y an. Ferner gilt

$$F'_y(\xi) = D_1 f(\xi, y) - D_1 f(\xi, 0) = y \cdot D_2 D_1 f(\xi, \eta)$$

mit η zwischen 0 und y wegen des Mittelwertsatzes, angewandt auf die Funktion

$$v \mapsto D_1 f(\xi, v). \quad \square$$

Die Überprüfung des Beweises zeigt, daß wir die Stetigkeit in a nur für eine der gemischten partiellen Ableitungen ausgenutzt haben.

Folgerung 7.2. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und f eine k -mal stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt

$$D_{i_1} \dots D_{i_k} f = D_{\pi(i_1)} \dots D_{\pi(i_k)} f$$

für alle Permutationen π von $\{i_1, \dots, i_k\}$.

Dies folgt sofort aus 6.1, da man jede Permutation durch sukzessive Vertauschung von jeweils 2 Elementen erzeugen kann.

Schreibweisen für partielle Ableitungen höherer Ordnung sind:

$$D_i D_j f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \quad D_i D_i f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}, \quad D_{i_1} \dots D_{i_k} f = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} \quad \text{u.ä.}$$

Wir wollen nun die Taylorformel für Funktionen mehrerer Veränderlichen aus der „gewöhnlichen“ Taylorformel ableiten. Dabei soll ja $f(y)$ in Bezug auf den Entwicklungspunkt x als Summe eines Polynoms in $y - x$ und einem Restglied geschrieben werden. Wir setzen $v = y - x$ und betrachten

$$g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(t) = f(x + tv).$$

Auf g können wir bei geeigneten Voraussetzungen über f die Taylorformel anwenden, so daß es „nur“ darauf ankommt, die höheren Ableitungen von g durch die höheren (partiellen) Ableitungen von f auszudrücken.

Für ein Tupel $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$ mit $\alpha_i \geq 0$ für alle i sei

$$D^\alpha f = \underbrace{D_1 \dots D_1}_{\alpha_1} \dots \underbrace{D_n \dots D_n}_{\alpha_n} f,$$

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n,$$

$$\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!,$$

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}.$$

Sei $k = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. Man schreibt

$$\binom{k}{\alpha} \quad \text{oder} \quad \binom{k}{\alpha_1 \dots \alpha_n} \quad \text{für} \quad \frac{k!}{\alpha!} = \frac{k!}{\alpha_1! \dots \alpha_n!}$$

und nennt diese Zahlen *Multinomialkoeffizienten*. Für den gewöhnlichen Binomialkoeffizienten $\binom{k}{j}$ gilt

$$\binom{k}{l} = \binom{k}{l \quad k-l}$$

wobei wir rechts die Multinomial-Schreibweise verwenden. (Natürlich brauchte man stets nur $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ anzugeben, da α_n durch sie und k eindeutig bestimmt ist.)

Bemerkung 7.3. Der Multinomialkoeffizient $\binom{k}{\alpha}$ gibt an, wie viele k -Tupel man aus den Zahlen $1, \dots, n$ bilden kann, in denen α_1 -mal die Zahl $1, \dots, \alpha_n$ -mal die Zahl n vorkommt. Dies kann man leicht durch Induktion über n beweisen: Man kann für die α_n Einträge n zunächst $\binom{k}{\alpha_n}$ Plätze auswählen und hat dann auf den restlichen $k - \alpha_n$ Plätzen die Einträge $1, \dots, n - 1$ gemäß ihrer Vielfachheit unterzubringen. Die gesuchte Anzahl beträgt also

$$\binom{k}{\alpha_n} \cdot \binom{k - \alpha_n}{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1}} = \binom{k}{\alpha}.$$

Es folgt die *Multinomialformel*

$$(x_1 + \cdots + x_n)^k = \sum_{|\alpha|=k} \binom{k}{\alpha} x^\alpha.$$

Alternativ kann man diese leicht per Induktion über n aus der Binomialformel ableiten und unsere Anzahl-Aussage schließen.

Satz 7.4. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ k -mal stetig differenzierbar. Seien $a, x \in U$ Punkte, deren Verbindungsstrecke in U liegt und $v = x - a$. Dann ist

$$g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(t) = f(a + tv),$$

k -mal stetig differenzierbar und es gilt

$$\frac{d^k g}{dt^k}(s) = \sum_{|\alpha|=k} \binom{k}{\alpha} D^\alpha f(a + sv) v^\alpha, \quad s \in [0, 1].$$

(Die Summe ist über alle n -Tupel $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ mit $|\alpha| = k$ zu bilden.)

Beweis von Satz 7.4. Es genügt zu zeigen, daß

$$\frac{d^k g}{dt^k}(s) = \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_k=1}^n D_{i_1} \cdots D_{i_k} f(a + sv) v_{i_1} \cdots v_{i_k}$$

ist. Wegen der Vertauschbarkeit der D_{i_j} ist nämlich

$$D_{i_1} \cdots D_{i_k} = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n} = D^\alpha,$$

falls die 1 genau α_1 -mal, \dots , die Zahl n genau α_n -mal vorkommt. Wie oben ausgeführt, tritt D^α genau $\binom{k}{\alpha}$ -mal auf. (Die Vertauschbarkeit der v_{i_j} hinsichtlich der Multiplikation nutzen wir natürlich auch.)

Die i -te Komponente von $t \mapsto a + tv$ hat die konstante Ableitung v_i . Daher ist nach der Kettenregel

$$\frac{dg}{dt}(s) = \sum_{i_1=1}^n D_{i_1} f(a + sv) \cdot v_{i_1}$$

und auch der Induktionsschluß benutzt lediglich die Kettenregel:

$$\begin{aligned}
 \frac{d^k g}{dt^k}(s) &= \frac{d}{dt} \frac{d^{k-1} g}{dt^{k-1}}(s) \\
 &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_{k-1}=1}^n v_{i_1} \cdots v_{i_{k-1}} D_{i_1} \cdots D_{i_{k-1}} f(a + sv) \right) \\
 &= \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_{k-1}=1}^n v_{i_1} \cdots v_{i_{k-1}} \frac{d}{dt} (D_{i_1} \cdots D_{i_{k-1}} f(a + sv)) \\
 &= \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_{k-1}=1}^n v_{i_1} \cdots v_{i_{k-1}} \left[\sum_{i_k=1}^n D_{i_k} D_{i_1} \cdots D_{i_{k-1}} f(a + sv) \cdot v_k \right] \\
 &= \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_k=1}^n D_{i_1} \cdots D_{i_k} f(a + sv) v_{i_1} \cdots v_{i_k}. \quad \square
 \end{aligned}$$

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $a \in I$ und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ $(m + 1)$ -mal stetig differenzierbar. Dann gilt

$$f(x) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + R_{m+1}(x),$$

wobei

$$R_{m+1}(x) = \frac{f^{m+1}(\xi)}{(m + 1)!} (x - a)^{m+1}$$

für ein geeignetes ξ zwischen x und a . (Dies ist die Lagrangsche Form des Restgliedes.)

Wir benutzen die Taylorformel für Funktionen einer Veränderlichen nun, um eine entsprechende Formel für Funktionen mehrerer Veränderlichen zu gewinnen:

Satz 7.5. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $a \in U$ und x ein Punkt aus U , für den die Verbindungsstrecke von a und x in U liegt. Sei $v = x - a$ und f eine $(m + 1)$ -mal stetig differenzierbare Funktion auf U . Dann ist

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!} v^\alpha + \sum_{|\alpha|=m+1} \frac{D^\alpha f(\xi)}{\alpha!} v^\alpha$$

wobei ξ ein Punkt auf der Strecke zwischen a und x ist.

Beweis. Wir setzen $g(t) = f(a + tv)$ für $t \in [0, 1]$. Auf g läßt sich dann die Taylorformel für Funktionen einer Variablen anwenden und Einsetzen gemäß 7.4 ergibt sofort das Ergebnis. \square

Satz 7.6. *Mit den Bezeichnungen und Voraussetzungen von 7.5 sei nun $\delta > 0$ so gewählt, daß $U_\delta(a) \subset U$. Dann gilt für alle $x \in U_\delta(a)$:*

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!} (x - a)^\alpha + R_{m+1}(x)$$

wobei

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{R_{m+1}(x)}{\|x - a\|^m} = 0.$$

Beweis. Zu beweisen ist nur noch die Aussage über das Restglied. Dabei genügt es, die einzelnen Summanden des Restglieds gemäß 7.5 zu betrachten. Die höheren partiellen Ableitungen $D^\alpha f$ sind auf $\overline{U_\delta(a)} \subset U$ als stetige Funktionen beschränkt. Folglich genügt es

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)^\alpha}{\|x - a\|^m} = 0$$

für $|\alpha| = m + 1$ zu zeigen. Mit $v = x - a$ folgt dies aus der Ungleichung

$$\frac{|v_1|^{\alpha_1} \dots |v_m|^{\alpha_m}}{\|v\|^m} = \frac{|v_1|^{\alpha_1} \dots |v_m|^{\alpha_m}}{\|v\|^{m+1}} \cdot \|v\| = \frac{|v_1|^{\alpha_1} \dots |v_m|^{\alpha_m}}{\|v\|^{\alpha_1} \dots \|v\|^{\alpha_m}} \cdot \|v\| \leq \|v\|. \quad \square$$

Für Satz 7.6 genügt es vorauszusetzen, daß f m -mal stetig differenzierbar ist (vgl. etwa Forster, Analysis II, p. 57). (Für den Fall $m = 1$ ist die Behauptung des Satzes die Definition der Differenzierbarkeit in a .)

Mit Hilfe der Taylorformel wollen wir nun noch die lokalen Extrema von Funktionen untersuchen. Zunächst verallgemeinern wir die aus der Analysis I bekannte notwendige Bedingung für das Vorliegen eines lokalen Extremums.

Satz 7.7. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ in $a \in U$ differenzierbar. Wenn es eine Umgebung $V \subset U$ von a gibt mit*

$$f(x) \leq f(a) \quad (f(x) \geq f(a))$$

für alle $x \in V$, so ist $\text{grad } f(a) = 0$.

Beweis. Die Beschränkungen von f auf die Parallelen der Koordinatenachsen durch a haben in a (erst recht) lokale Extrema, so daß alle partiellen Ableitungen von f in a verschwinden. \square

Die Taylorentwicklung von f bis zum Grad 2 an einem lokalen Extremum a ist also

$$f(a + v) = f(a) + P_2(v) + R_3(a + v),$$

wobei

$$\begin{aligned} P_2(v) &= \sum_{|\alpha|=2} \frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!} v^\alpha \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{D_i D_j f(a)}{1} v_i v_j + \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{D_i D_i f(a)}{2} v_i^2. \end{aligned}$$

Es ist im folgenden besser, $P_2(v)$ in einer symmetrischeren Form anzugeben, wobei wir

$$D_i D_j f(a) v_i v_j = \frac{D_i D_j f(a)}{2} v_i v_j + \frac{D_j D_i f(a)}{2} v_j v_i$$

einsetzen:

$$P_2(v) = \sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{D_i D_j f(a)}{2} v_i v_j.$$

Mit der Matrix

$$A = (a_{ij}) = (D_i D_j f(a))$$

gilt

$$P_2(v) = \frac{1}{2} v^T A v;$$

$P_2(v)$ ist also (im Sinne der linearen Algebra) eine *quadratische Form* in v . Man schreibt

$$\text{Hess } f(a) = (D_i D_j f(a))$$

und nennt diese Matrix die *Hessesche (Matrix) von f an der Stelle a* .

Die Hessesche ist also die „zweite Ableitung“ von f in a . Für das im folgenden zu definierende Kriterium für lokale Extrema müssen wir nun die richtige Formulierung dafür finden, daß $\text{Hess } f(a)$ „positiv“ oder „negativ“ ist.

Sei allgemeiner A eine symmetrische $n \times n$ -Matrix über \mathbb{R} . Für $v \in \mathbb{R}^n$ setzen wir

$$F(v) = v^T A v.$$

Man nennt A

- (a) *positiv definit*, falls $F(v) > 0$ für alle $v \neq 0$,
- (b) *negativ definit*, falls $F(v) < 0$ für alle $v \neq 0$,
- (c) *indefinit*, falls es $v, w \in \mathbb{R}^n$ mit $F(v) > 0$, $F(w) < 0$ gibt.

(Falls man in (a) oder (b) die Gleichheit nicht ausschließen will, ersetzt man „definit“ durch „semidefinit“.)

Falls A positiv definit ist, hat F in 0 offensichtlich ein lokales Minimum, das sogar *isoliert* ist:

$$F(v) > F(0) \quad \text{für alle } v \text{ in einer Umgebung von } 0.$$

Im negativ definiten Fall liegt in 0 ein isoliertes Maximum. Im indefiniten Fall gibt es (offensichtlich) beliebig nahe bei 0 positive und negative Funktionswerte, also hat F dann kein lokales Extremum in 0. Man kann sich dies gut an den Graphen der drei Funktionen

$$F_1(v) = v_1^2 + v_2^2 = v^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v, \quad (1)$$

$$F_2(v) = -v_1^2 - v_2^2 = v^T \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} v, \quad (2)$$

$$F_3(v) = v_1^2 - v_2^2 = v^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} v, \quad (3)$$

veranschaulichen. (Man sagt, F_3 habe in 0 einen *Sattelpunkt*.)

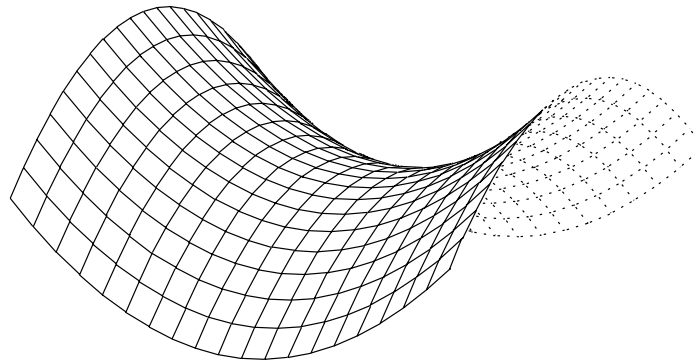


ABBILDUNG 1. Ein Sattelpunkt

Bemerkung 7.8. Natürlich stellt sich die Frage, wie man entscheidet, ob Hess $f(a)$ positiv definit, negativ definit oder indefinit ist. Dazu erinnern wir an die folgenden Aussagen der Linearen Algebra:

- (a) Alle Eigenwerte einer reell-symmetrischen Matrix A sind reell.
- (b) Es gibt eine Orthonormalbasis v_1, \dots, v_n des \mathbb{R}^n aus Eigenvektoren zu A .
- (c) Für alle $v \in \mathbb{R}^n$, $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$ ist dann

$$v^T A v = \lambda_1 a_1^2 + \dots + \lambda_n a_n^2,$$

wobei λ_i der Eigenwert zu v_i ist, $i = 1, \dots, n$.

- (d) Folglich gilt:

$$A \text{ positiv definit} \iff \lambda_1, \dots, \lambda_n > 0,$$

$$A \text{ negativ definit} \iff \lambda_1, \dots, \lambda_n < 0,$$

$$A \text{ indefinit} \iff A \text{ besitzt mindestens einen positiven und einen negativen Eigenwert.}$$

- (e) A ist genau dann positiv definit, wenn die Determinanten der Untermatrizen

$$A^{(k)} = (a_{ij} \neq 0 : 1 \leq i, j \leq k)$$

für alle $k = 1, \dots, n$ positiv sind.

Das folgende Kriterium zeigt, daß wir die richtigen Begriffe für „positive“ oder „negative“ zweite Ableitung gefunden haben:

Satz 7.9. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Für $a \in U$ sei $\text{grad } f(a) = 0$. Dann gilt

- (a) Ist $\text{Hess } f(a)$ positiv definit, so hat f in a ein isoliertes Minimum.
- (b) Ist $\text{Hess } f(a)$ negativ definit, so hat f in a ein isoliertes Maximum.
- (c) Ist $\text{Hess } f(a)$ indefinit, so hat f in a kein lokales Extremum.

Beweis. Sei $A = \text{Hess } f(a)$. Die Taylor-Entwicklung ergibt

$$f(a + v) = f(a) + \frac{1}{2}v^T A v + \varphi(v)$$

mit

$$A = \text{Hess } f(a) \quad \text{und} \quad \lim_{v \rightarrow 0} \frac{\varphi(v)}{\|v\|^2} = 0.$$

Wir betrachten zunächst (a). Sei

$$c = \frac{1}{2} \min\{v^T A v : \|v\| = 1\}.$$

Diese Definition ist sinnvoll, weil wir das Minimum einer stetigen Funktion auf einer kompakten Menge bilden. Nach Voraussetzung über $\text{Hess } f(a)$ ist $c > 0$. Für alle $v \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\frac{1}{2}v^T A v = \|v\|^2 \cdot \frac{v^T}{\|v\|} A \frac{v}{\|v\|} \geq c\|v\|^2.$$

Wir wählen nun $\delta > 0$ so klein, daß

$$|\varphi(v)| \leq \frac{c}{2}\|v\|^2$$

für alle $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| < \delta$. Für $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$, $\|v\| < \delta$, mit $a + v \in U$ gilt dann

$$\begin{aligned} f(a + v) &= f(a) + \frac{1}{2}v^T A v + \varphi(v) \\ &\geq f(a) + c\|v\|^2 - |\varphi(v)| \geq f(a) + \frac{c}{2}\|v\|^2 > f(a). \end{aligned}$$

Mit anderen Worten, f hat in a ein isoliertes Minimum, wie behauptet. Aussage (b) beweist man analog oder durch Anwendung von (a) auf $-f$.

Für (c) wählen wir ein $v \in \mathbb{R}^n$ von A mit $v^T A v < 0$ und ein $w \in \mathbb{R}^n$ mit $w^T A w > 0$. Dann ist

$$g :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \mathbb{R}, \quad g(t) = f(a + tv)$$

für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ wohldefiniert. Diese Funktion hat in a ein isoliertes Minimum gemäß (a): Es gilt ja $g'(0) = 0$ und $g''(0) = \frac{1}{2}v^T A v$ gemäß Satz 7.4. Analog hat

$$h :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \mathbb{R}, \quad h(t) = g(a + tw)$$

in a ein isoliertes Maximum gemäß (b). Also kann f in a kein lokales Extremum besitzen. \square

Wir merken noch an, daß keine allgemeine Aussage über das Vorliegen eines lokalen Extremums bei x möglich ist, wenn Hess $f(x)$ nur semidefinit ist, z.B. also dann, wenn Hess $f(x) = 0$ ist. Beispiele werden in den Übungsaufgaben behandelt.

ABSCHNITT 8

Vektorfelder und Wegintegrale

Die physikalische Interpretation veranlaßt uns, bestimmte Abbildungen als Vektorfelder zu bezeichnen:

Definition. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge. Dann nennen wir eine Abbildung $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein *Vektorfeld* auf U .

In der Physik repräsentieren Vektorfelder z.B. Kraftfelder. Man denke etwa an das Gravitationsfeld oder das elektrostatische Feld. Wir können Vektorfelder aber auch einsetzen, um eine Strömung zu beschreiben. (Bei vielen Anwendungen ist f von einem Zeitparameter abhängig.)

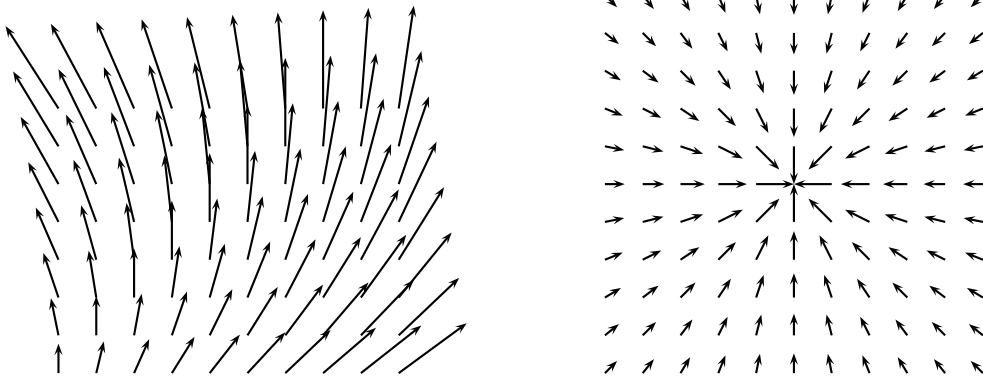


ABBILDUNG 1. Vektorfelder

Beispiel 8.1.

(a) Für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ setzen wir

$$f(x, y) = (-y, x).$$

Dann ist $f(x, y)$ gerade das Geschwindigkeitsfeld der mit „konstanter Winkelgeschwindigkeit 1“ um den Nullpunkt rotierenden Ebene. Mit anderen Worten $f(x, y)$ ist der Tangentialvektor an den Weg

$$w(t) = r(\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi], \quad r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

zum Zeitpunkt, in dem dieser durch (x, y) läuft.

(b) Sei $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ und $F(x) = 1/r$, $r = \|x\|$. Wir setzen

$$f(x) = \text{grad } F(x) = -\frac{x}{r^2}.$$

Ein solches Vektorfeld repräsentiert eine auf den Nullpunkt gerichtete „Zentralkraft“, die mit dem Faktor $1/r$ abnimmt.

Allgemeiner als in (b) hätten wir den Gradienten irgendeiner auf U differenzierbaren Funktion betrachten können. Solche Felder heißen *Gradientenfelder* und die Hauptfrage dieses Paragraphen ist es, die Gradientenfelder zu charakterisieren. Falls $f = \text{grad } F$ gilt mit einer differenzierbaren Funktion F auf U , heißt f auch *integrabel* und F ein *Integral* oder eine *Stammfunktion* von f . In der Physik heißt F ein *Potential* von f und f ein *Potentialfeld* oder *konservatives Vektorfeld*.

Eine notwendige Bedingung für die Existenz von Stammfunktionen kennen wir schon:

Satz 8.2. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Wenn es eine Funktion $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f = \text{grad } F$ gibt, ist $D_i f_j = D_j F_i$ für alle i, j , $1 \leq i, j \leq n$.

Beweis. Die Funktion F ist zweimal stetig differenzierbar. Also ist

$$D_i f_j = D_i(D_j F) = D_j(D_i F) = D_j f_i. \quad \square$$

Wenn sich ein Objekt in einem Kraftfeld bewegt, so wird dafür Energie gebraucht (oder gewonnen). Diese kann man mittels eines Wegintegrals bestimmen:

Definition. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld, $w : [a, b] \rightarrow U$ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg und t_0, \dots, t_m eine Zerlegung von w , so daß $w|_{[t_i, t_{i+1}]}$ stetig differenzierbar ist für $i = 0, \dots, m-1$. Dann heißt

$$\int_w f = \sum_{i=0}^{m-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \langle f(w(t)), w'(t) \rangle dt$$

das *Wegintegral* (Kurvenintegral, Integral) von f längs w .

Man muß natürlich noch überprüfen, daß das Integral von der gewählten Zerlegung unabhängig ist. Wir erlauben uns, im folgenden einfach

$$\int_w f = \int_a^b \langle f(w(t)), w'(t) \rangle dt$$

zu schreiben. Dies ist auch gerechtfertigt, denn die Funktion $t \mapsto \langle f(w(t)), w'(t) \rangle$ ist stückweise stetig auf $[a, b]$, nachdem man sie in den endlich vielen „Knickpunkten“ von w beliebig ergänzt hat.

Das Wegintegral ist linear:

$$\int_w (f_1 + f_2) = \int_w f_1 + \int_w f_2, \quad \int_w (\alpha f) = \alpha \int_w f.$$

Dies folgt unmittelbar aus der Definition. Ferner gilt

$$\int_w f = \int_{w_1} f + \int_{w_2} f,$$

wenn w sich aus w_1 und w_2 zusammensetzt. Zur Abschätzung von Wegintegralen benutzt man die Ungleichung

$$\left| \int_w f \right| \leq L(w) \cdot \sup\{\|f(w(t))\| : t \in [a, b]\}$$

Dies ergibt sich mit Hilfe der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung aus Satz 4.3:

$$\begin{aligned} \left| \int_w f \right| &= \left| \int_a^b \langle f(w(t)), w'(t) \rangle dt \right| \leq \int_a^b |\langle f(w(t)), w'(t) \rangle| dt \\ &\leq \int_a^b \|f(w(t))\| \|w'(t)\| dt \leq \sup\{\|f(w(t))\| : t \in [a, b]\} \int_a^b \|w'(t)\| dt \end{aligned}$$

Man rechnet leicht aus, daß $\int_w f$ sich bei einer orientierungserhaltenden stetig differenzierbaren Parametertransformation nicht ändert, hingegen das Vorzeichen wechselt, wenn die Parametertransformation orientierungsumkehrend ist. In Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung gilt:

Satz 8.3. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $w : [a, b] \rightarrow U$ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg. Dann ist

$$\int_w \text{grad } F = F(w(b)) - F(w(a)).$$

Beweis. Durch Zerlegung in Teilstücke dürfen wir annehmen, w sei stetig differenzierbar. Sei $G = F \circ w : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Dann ist G stetig differenzierbar und

$$G'(t) = \langle \text{grad } F(w(t)), w'(t) \rangle$$

nach der Kettenregel. Der Hauptsatz impliziert nun

$$G(b) - G(a) = \int_a^b G'(t) dt = \int_a^b \langle \text{grad } F(w(t)), w'(t) \rangle dt = \int_w \text{grad } F. \quad \square$$

Satz 8.3 sagt speziell, daß ein Wegintegral eines Gradientenfeldes nur von Anfangs- und Endpunkt des Weges abhängt, nicht aber davon, wie der Weg zwischen ihnen verläuft. Dies ist im allgemeinen keineswegs der Fall:

Beispiel 8.4. Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(x, y) = (-y, x)$, $w_1(t) = (\cos t, \sin t)$, $w_w(t) = (\cos t, -\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Also durchläuft w_1 den Einheitskreis positiv (gegen den Uhrzeiger) und w_2 negativ (mit dem Uhrzeiger). Es

ist

$$\int_{w_1} f = \int_0^{2\pi} \langle (-\sin t, \cos t), (-\sin t, \cos t) \rangle dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi,$$

$$\int_{w_2} f = \int_0^{2\pi} \langle (\sin t, \cos t), (-\sin t, -\cos t) \rangle dt = \int_0^{2\pi} (-1) dt = -2\pi.$$

In der Tat charakterisiert Satz 8.2 die Gradientenfelder:

Satz 8.5. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und wegzusammenhängend, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld. Genau dann besitzt f eine Stammfunktion F , wenn für alle $u, v \in U$ und alle stückweise stetig differenzierbaren Wege w_1, w_2 mit Anfangspunkt u und Endpunkt v gilt:

$$\int_{w_1} f = \int_{w_2} f.$$

Beweis. Wir wählen einen „Basispunkt“ $u \in U$ und definieren eine Funktion $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ mittels

$$F(v) = \int_w f,$$

wobei w ein Weg mit Anfangspunkt u und Endpunkt v ist. Diese Definition ist sinnvoll, weil die Wahl des Weges irrelevant ist.

Wir wollen nun nachprüfen, daß $D_1 F = f_1$ gilt. Für die anderen Komponenten verläuft der Beweis genauso.

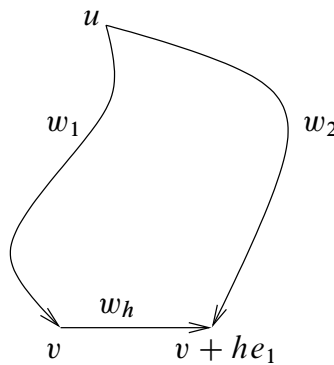


ABBILDUNG 2. Die Wege w_1, w_2 und w_h

Sei $w_h : [0, 1] \rightarrow U$ die geradlinige Verbindung von v nach $v + he_1$,

$$w_h(t) = v + the_1.$$

Nach Voraussetzung ist (mit den Bezeichnungen der Abbildung)

$$\int_{w_1} f + \int_{w_h} f = \int_{w_2} f = F(v) + \int_{w_h} f = F(v + he_1).$$

Daher gilt

$$\begin{aligned} F(v + he_1) - F(v) &= \int_{w_h} f = \int_0^1 \langle f(v + the_1), he_1 \rangle dt \\ &= \int_0^1 f_1(v + the_1) \cdot h dt = h \int_0^1 f_1(v + the_1) dt \end{aligned}$$

Mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung erhalten wir

$$\frac{F(v + he_1) - F(v)}{h} = \int_0^1 f_1(v + the_1) dt = f_1(v + \tau he_1)(1 - 0) = f_1(v + \tau he_1)$$

für ein $\tau \in [0, 1]$. Für $h \rightarrow 0$ geht die rechte Seite gegen $f_1(v)$. \square

Die Voraussetzung „wegzusammenhängend“ ist unwesentlich. Wir haben sie der Einfachheit halber gemacht. Wir können sie auf „zusammenhängend“ abschwächen, weil offene zusammenhängende Mengen ohnehin wegzusammenhängend sind. Schließlich können wir sie ganz weglassen, weil jede offene Menge disjunkte Vereinigung offener zusammenhängender Mengen ist.

In der Physik wird $\int_w f$ oft als „Arbeit“ interpretiert, als Energie, die aufgebracht werden muß (oder gewonnen wird), um ein Objekt vom Anfangspunkt von w längs w zum Endpunkt zu bewegen. In einem konservativen Vektorfeld ist also die längs eines Weges zu erbringende Arbeit gerade die Potentialdifferenz zwischen End- und Anfangspunkt. (Vorsicht: ein negatives Ergebnis besagt, daß „gearbeitet“ werden muß – in der Physik ersetzt man deshalb häufig F durch $-F$.)

Die Bedingung in 8.3 kann man äquivalent auch so formulieren: Das Integral von f über einem geschlossenen Weg verschwindet („geschlossen“ heißt, daß Anfangs- und Endpunkt übereinstimmen).

Bemerkenswerterweise gilt für viele offene Mengen U auch die Umkehrung von 8.2. Wir streben dabei nicht die größtmögliche Allgemeinheit an, sondern betrachten sternförmige Mengen:

Definition. Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt *sternförmig* (bezüglich $a \in M$), wenn mit jedem Punkt $b \in M$ auch die Verbindungsstrecke von a und b in M liegt.

Satz 8.6. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene, sternförmige Menge und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld, das die Bedingung

$$D_i f_j = D_j f_i$$

für alle i und j erfüllt. Dann besitzt f eine Stammfunktion.

Beweis. Sei U sternförmig bezüglich $u \in U$. Für $v \in U$ sei dann

$$w_v : [0, 1] \rightarrow U, \quad w_v(x) = (1 - t)u + tv,$$

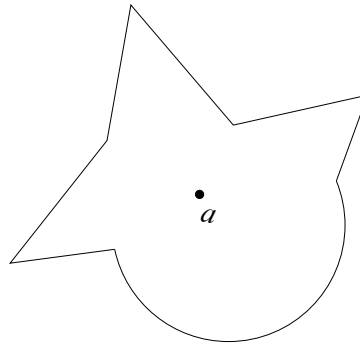


ABBILDUNG 3. Ein sternförmiges Gebiet

der u und v geradlinig verbindende Weg. Wir setzen

$$F(v) = \int_{w_v} f.$$

(Satz 8.3 zeigt, daß wir, abgesehen von der Addition einer Konstanten, keine andere Wahl haben.) Wir müssen zeigen, daß $D_i F = f_i$ für alle i gilt.

Nach Definition des Wegintegrals ist

$$F(v) = \int_0^1 \left[\sum_{k=1}^n f_k(u + t(v - u)) \cdot (v_k - u_k) \right] dt = \int_0^1 h(v, t) dt,$$

wobei wir die Funktion $h : U \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mittels

$$h(x, t) = \sum_{k=1}^n f_k(u + t(x - u))(x_k - u_k)$$

definieren. Um die partiellen Ableitungen von F auszurechnen, können wir Differentiation unter dem Integralzeichen benutzen, denn alle partiellen Ableitungen von h existieren und sind stetig. Also

$$D_i F(v) = \int_0^1 D_i h(v, t) dt.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} D_i h(v, t) &= \sum_{k=1}^n t \cdot D_i f_k(u + t(v - u))(v_k - u_k) + f_i(u + t(v - u)) \\ &= \sum_{k=1}^n t \cdot D_k f_i(u + t(v - u))(v_k - u_k) + f_i(u + t(v - u)) \\ &= t \cdot \frac{\partial}{\partial t} f_i(u + t(v - u)) + f_i(u + t(v - u)). \end{aligned}$$

Bei der ersten Gleichung ist zu beachten, daß der Summand für $k = i$ eine Sonderrolle spielt und die Produktregel angewandt wird. Die zweite Gleichung gilt nach Voraussetzung, und die dritte wegen der Kettenregel. Also ist

$$\begin{aligned} D_i F(v) &= \int_0^1 t \cdot \frac{\partial}{\partial t} f_i(u + t(v - u)) dt + \int_0^1 f_i(u + t(v - u)) dt \\ &= t \cdot f_i(u + t(v - u)) \Big|_0^1 \\ &= f_i(v), \end{aligned}$$

wobei die zweite Gleichung einfach die partielle Integration ist. \square

Die Voraussetzung

$$D_j f_i = D_i f_j \quad \text{für alle } i, j$$

von Satz 8.6 heißt auch *Integrabilitätsbedingung*, und die Sätze 8.2 und 8.6 zeigen, daß diese Bezeichnung gerechtfertigt ist.

Einfache Beispiele (siehe Übungsaufgaben) zeigen, daß für beliebiges U die Integrabilitätsbedingung nicht ausreicht. Wir können aus Satz 8.6 aber immerhin die Existenz lokaler Stammfunktionen ableiten:

Folgerung 8.7. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld, das der Integrabilitätsbedingung genügt. Dann existiert zu jedem $u \in U$ eine Umgebung V , so daß $f|_V$ eine Stammfunktion besitzt.*

Beweis. Wähle $V = U_\varepsilon(u) \subset U$. \square

Will man 8.7 über 8.6 hinaus „globalisieren“, so muß man neue topologische Begriffe einführen.

ABSCHNITT 9

Implizite Funktionen

In diesem Abschnitt geht es um die Auflösung von Gleichungssystemen, die durch differenzierbare Funktionen gegeben sind. Als einfaches Beispiel betrachten wir die einzelne Gleichung $x^2 + y^2 = 1$.

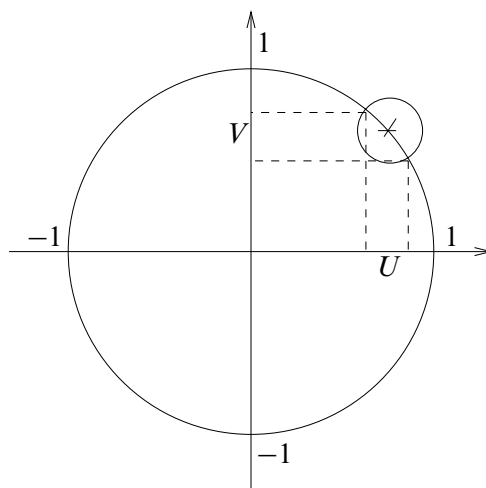


ABBILDUNG 1. Lokale Auflösung von $x^2 + y^2 = 1$

Können wir diese Gleichung nach x oder y auflösen? Dabei soll „auflösen“ immer bedeuten, daß die Auflösung *eindeutig* ist: die Antwort

$$y = \pm \sqrt{1 - x^2}, \quad x \in [-1, 1],$$

ist daher nicht ausreichend. Eine Antwort auf unsere Frage können wir nur „lokal“ erhalten. Wenn wir zum Beispiel den Punkt $(u, v) = (1/2)(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ betrachten, so hat er eine Umgebung W mit folgender Eigenschaft: es existieren Umgebungen U von u und V von v und eine Funktion $f : U \rightarrow V$, so daß für $(x, y) \in W$

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad y = f(x) \quad \text{mit } x \in U.$$

Wir können (und müssen) $y = \sqrt{1 - x^2}$ wählen. Kurz gesagt: in einer gewissen Umgebung von (u, v) haben wir die Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ nach y aufgelöst. Ebenso könnten wir sie auch nach x auflösen. Man sagt, die Funktion f sei *implizit* durch die Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ gegeben. Dies erklärt die Benennung dieses Abschnitts.

Hinsichtlich der Auflösbarkeit nach beiden Variablen gibt es aber Ausnahmepunkte! Wie klein wir auch die Umgebung U von $(1, 0)$ machen: die Auflösung nach y ist nicht möglich. Ebenso ist bei $(0, 1)$ die Auflösung nach x nicht möglich.

Es fällt auf, daß die „kritischen“ Punkte gerade diejenigen sind, in denen

$$\frac{\partial F}{\partial x}(u, v) = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(u, v) = 0$$

ist für $F(x, y) = 1 - (x^2 + y^2)$. Wenn man die Taylor-Entwicklung von g betrachtet, ist dies nicht überraschend. Gesucht sind Lösungen der Gleichung

$$0 = F(x, y) = \frac{\partial F(u, v)}{\partial x}(x - u) + \frac{\partial F(u, v)}{\partial y}(y - v) + R_2(x, y),$$

und für die Auflösung nach x oder y sollte wenigstens das lineare Gleichungssystem, das ja die „erste Näherung“ darstellt,

$$0 = \frac{\partial F(u, v)}{\partial x}(x - u) + \frac{\partial F(u, v)}{\partial y}(y - v)$$

nach x bzw. y auflösbar sein. Wir werden sehen, daß diese Bedingung (sogar) hinreichend ist.

Zur Vorbereitung auf den höherdimensionalen Fall diskutieren wir zunächst lineare Gleichungssysteme. Man kann sich dabei auf den homogenen Fall beschränken. Wir betrachten das Gleichungssystem

$$Cz = 0.$$

mit einer $m \times n$ -Matrix C vom Rang m . Wann läßt sich dieses Gleichungssystem nach (zum Beispiel) den letzten m Variablen auflösen? Dazu zerlegen wir C und z :

$$C = (A \ B), \quad z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

wobei A eine $m \times k$ -Matrix, $k = n - m$, und B eine $m \times m$ -Matrix ist, $x \in \mathbb{R}^k$, $y \in \mathbb{R}^m$. Sei $L \subset \mathbb{R}^n$ der Lösungsraum des Gleichungssystems. Auflösbarkeit nach y bedeutet ja, daß man eine surjektive lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^k \rightarrow L$ finden kann, so daß für alle $x \in \mathbb{R}^k$ gilt:

$$(A \ B) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \quad \iff \quad y = \varphi(x).$$

Da $\dim L = k$ ist, muß φ sogar bijektiv sein. Mit dem Ansatz $\varphi(x) = Dx$ erhält man

$$(A \ B) \begin{pmatrix} x \\ Dx \end{pmatrix} = 0 \quad \iff \quad (A + BD)x = 0 \quad \iff \quad A = -BD.$$

Da A den Rang m hat, müssen auch B und D den Rang m haben und somit muß

$$D = -B^{-1}A$$

sein. Zusammengefaßt: Die Auflösung des linearen Gleichungssystems nach y ist genau dann möglich, wenn B invertierbar ist und die Auflösung $y = \varphi(x)$ ist durch $y = -B^{-1}Ax$ gegeben.

Diese Aussage läßt sich vom linearen Fall auf den „in erster Näherung linearen Fall“ der differenzierbaren Abbildungen übertragen. An die Stelle von C und A und B treten dabei die Jacobi-Matrix und Untermatrizen davon. Für die Abbildung $F : W \rightarrow \mathbb{R}^m$, $W \subset \mathbb{R}^n$ offen, $n = k + m$, $z \in W$, $z = (x, y)$, $x \in \mathbb{R}^k$, $y \in \mathbb{R}^m$, sei

$$\frac{\partial F}{\partial y}(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(u, v) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(u, v) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(u, v) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(u, v) \end{pmatrix}$$

die aus den letzten m Spalten der Jacobi-Matrix bestehende Untermatrix.

Als ersten Schritt formulieren wir die Existenz und Stetigkeit der Auflösung eines differenzierbaren Gleichungssystems.

Satz 9.1. Seien $U \subset \mathbb{R}^k$, $V \subset \mathbb{R}^m$ offene Mengen und $W = U \times V \subset \mathbb{R}^n$, $n = k + m$. Die Abbildung $F : W \rightarrow \mathbb{R}^m$ sei stetig differenzierbar, und für $u \in U$, $v \in V$ sei

$$F(u, v) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(u, v) \text{ invertierbar.}$$

Dann gibt es Umgebungen U' von u und V' von v mit folgender Eigenschaft: Zu jedem $x \in U'$ existiert genau ein $y \in V'$ mit $F(x, y) = 0$, und die Abbildung $f : U' \rightarrow V'$, $f(x) = y$, ist stetig.

Wir werden weiter unten beweisen, daß f sogar stetig differenzierbar ist.

Beweis von Satz 9.1. Wir entwickeln zunächst ein Verfahren, mit dem man für ein x (aus dem noch zu bestimmenden U') ein y mit $F(x, y) = 0$ finden kann. Nehmen wir an, wir hätten einen Näherungswert y' für y (z.B. $y' = v$). Bei festem x hat $F(x, y)$ die Taylorentwicklung

$$\begin{aligned} F(x, y) &= F(u, v) + \frac{\partial F}{\partial x}(u, v) \cdot (x - u) + \frac{\partial F}{\partial y}(u, v) \cdot (y - v) + R_2(y) \\ &= B \cdot (y - v) + \frac{\partial F}{\partial x}(u, v) \cdot (x - u) + R_2(y), \end{aligned}$$

wobei wir $B = (\partial F / \partial y)(u, v)$ gesetzt haben. Einsetzen von y' ergibt

$$F(x, y') = B \cdot (y' - v) + \frac{\partial F}{\partial x}(u, v) \cdot (x - u) + R_2(y').$$

Unter Vernachlässigung der Restglieder soll also gelten

$$B \cdot (y - v) + \frac{\partial F}{\partial x}(u, v) \cdot (x - u) \approx B \cdot (y' - v) + \frac{\partial F}{\partial x}(u, v) \cdot (x - u) - F(x, y').$$

Näherungsweise ergibt dies

$$y \approx y' - B^{-1}F(x, y').$$

Dies legt ein Iterationsverfahren

$$y_0 = y', \quad y_{j+1} = G(y_j)$$

mit $G(y_j) = y_j - B^{-1}F(x, y_j)$ nahe. Damit ist die Grundidee des Beweises formuliert. Der Banachsche Fixpunktsatz wird uns nach geeigneter Wahl von U' und V' die Existenz und Eindeutigkeit von y liefern und schließlich auch die Stetigkeit von f .

Wir wählen die Umgebungen U' von u und $V' = U_\varepsilon(v)$ so, daß

$$\begin{aligned} \left\| I_m - B^{-1} \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \right\| &\leq \frac{1}{2} \quad \text{für } x \in U', y \in V', \\ \|B^{-1}F(x, v)\| &\leq \frac{1}{4}\varepsilon \quad \text{für } x \in U'. \end{aligned}$$

Dabei ist I_m die $m \times m$ -Einheitsmatrix; die Matrizenorm haben wir in Abschnitt 5 eingeführt. Die Existenz von Umgebungen U' und V' für die erste Ungleichung, folgt aus der stetigen Differenzierbarkeit von F : wenn (x, y) nahe bei (u, v) liegt, unterscheiden sich die Einträge der Matrix $(\partial F/\partial y)(x, y)$ nur wenig von denen der Matrix B . Für die zweite Ungleichung muß man U' möglicherweise noch einmal verkleinern und die Stetigkeit von F sowie $F(u, v) = 0$ ausnutzen.

Sei $x \in U'$ fest gewählt. Wir betrachten die oben eingeführt Abbildung G auf V' . Es gilt für die Jacobi-Matrix von G

$$JG(y) = I_m - B^{-1} \frac{\partial F}{\partial y}(x, y).$$

Nach dem Schrankensatz gilt

$$\begin{aligned} \|G(y) - G(z)\| &\leq \sup_{w \in V'} \left\| I_m - B^{-1} \frac{\partial F}{\partial y}(x, w) \right\| \cdot \|y - z\| \\ &\leq \frac{1}{2} \|y - z\|. \end{aligned}$$

Also ist G kontrahierend. Ferner ist

$$\|G(v) - v\| = \|B^{-1}F(x, v)\| \leq \frac{1}{4}\varepsilon.$$

Für $y \in \overline{U}_{\varepsilon/2}(v)$ ist daher

$$\begin{aligned} \|G(y) - v\| &\leq \|G(y) - G(v)\| + \|G(v) - v\| \leq \frac{1}{2} \|y - v\| + \frac{1}{4}\varepsilon \\ &\leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{4}\varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon. \end{aligned}$$

Also ist $G(\overline{U}_{\varepsilon/2}(v)) \subset \overline{U}_{\varepsilon/2}(v)$, und der Banachsche Fixpunktsatz liefert die Existenz eines eindeutig bestimmten $f(x) \in \overline{U}_{\varepsilon/2}(v)$ mit

$$G(f(x)) = f(x),$$

äquivalent $F(x, f(x)) = 0$, denn

$$G(f(x)) = f(x) \iff f(x) = f(x) - B^{-1}F(x, f(x)).$$

Als nächstes ist zu zeigen, daß $f(x)$ die einzige Lösung y der Gleichung $F(x, y) = 0$ für $y \in V'$. Für jede Lösung y ist

$$\|y - f(x)\| = \|G(y) - G(f(x))\| \leq \frac{1}{2}\|y - f(x)\|$$

nach der oben bewiesenen Ungleichung. Folglich ist $\|y - f(x)\| = 0$, $y = f(x)$.

Schließlich ist noch die Stetigkeit von f zu beweisen. Dafür brauchen wir aber überhaupt nicht mehr zu arbeiten, sondern nur die punktweise Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes auf einen geeigneten Funktionenraum auszudehnen, nämlich den Banachraum der beschränkten stetigen Abbildungen $h : U' \rightarrow \mathbb{R}^m$. (Die Norm ist die Supremumsnorm.)

Wir betrachten die Menge S aller stetigen Abbildungen

$$g : U' \rightarrow \overline{U}_{\varepsilon/2}(v).$$

Dies ist ja gerade die abgeschlossene $\varepsilon/2$ -Kugel um die konstante Abbildung $\tilde{g} : U' \rightarrow \overline{U}_{\varepsilon/2}(v)$, $\tilde{g}(x) = v$ für alle $x \in U'$. Für $g \in S$ sei

$$(\Phi(g))(x) = G_x(g(x)),$$

wobei G_x die oben für festes x eingeführte Abbildung G ist. Es ist

$$G_x(g(x)) = g(x) - B^{-1}F(x, g(x)).$$

Daher ist $\Phi(g)$ wieder stetig. Ferner ist – wie oben gezeigt –

$$G_x(g(x)) \in \overline{U}_{\varepsilon/2}(v) \quad \text{für alle } x.$$

Folglich definiert Φ eine Abbildung von S in S . Schließlich ist

$$\|(\Phi(h))(x) - (\Phi(g))(x)\| \leq \frac{1}{2}\|h(x) - g(x)\| \quad \text{für alle } x \in U'.$$

Dies impliziert

$$\|\Phi(h) - \Phi(g)\| \leq \frac{1}{2}\|g - h\|,$$

wobei wir die Supremumsnorm verwenden. Da S eine abgeschlossene (nichtleere, denn $\tilde{g} \in S$) Teilmenge des Banachraums aller beschränkten stetigen Abbildungen $U' \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist, ergibt der Banachsche Fixpunktsatz die Existenz genau einer Abbildung $g \in S$ mit

$$\Phi(g) = g.$$

Punktweise Betrachtung zeigt: dieses g ist die oben bereits konstruierte Abbildung f , die sich damit als stetig erwiesen hat. Damit ist der Beweis von 9.1 abgeschlossen. \square

Bemerkung 9.2.

- (a) Das im Beweis angegebene Iterationsverfahren läßt sich durchaus numerisch verwenden. Allerdings sollte man die feste Matrix J^{-1} durch $[(\partial F/\partial y)(x, y)]^{-1}$ ersetzen. (Betrachte dazu Taylorentwicklung um (x, y) .)
- (b) Der letzte Teil des Beweises besagt nichts anderes, als daß die z.B. mit dem Startwert g_0 , $g_0(x) = v$ für alle $x \in U'$, und $g_{j+1} = \Phi(g_j)$ gebildete Funktionenfolge gleichmäßig konvergiert.
- (c) Wenn man die Suche nach einem Fixpunkt zur Suche nach einer Nullstelle umformuliert, erhält man (zumindest nach der Änderung wie zu (a) angegeben) das mehrdimensionale Newton-Verfahren.

Nachdem die Stetigkeit der Auflösung $y = f(x)$ bewiesen ist, können wir nun (unter etwas schwächeren Voraussetzungen) sogar ihre Differenzierbarkeit beweisen:

Satz 9.3. Seien $U \subset \mathbb{R}^k$, $V \subset \mathbb{R}^m$ offene Mengen und $F : W \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine auf $W = U \times V$ stetige Abbildung, für die gilt:

$$F(u, v) = 0, \quad F \text{ ist in } (u, v) \text{ differenzierbar,} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(u, v) \text{ ist invertierbar.}$$

Es gebe eine stetige Abbildung $f : U \rightarrow V$ mit $f(u) = v$ und $F(x, f(x)) = 0$ für alle $x \in U$. Dann ist f in u differenzierbar, und es gilt

$$Jf(u) = - \left(\frac{\partial F}{\partial y}(u, v) \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(u, v).$$

Beweis. Wir überlegen uns zunächst, daß die Formel für die Jacobi-Matrix richtig ist (was sich allerdings aus dem folgenden noch einmal ergibt). Die Abbildung

$$H : x \mapsto F(x, f(x))$$

hat den konstanten Wert 0. Wenn f in u differenzierbar ist, ergibt die Kettenregel

$$0 = JH(u) = \frac{\partial F}{\partial x}(u, v) \cdot I_k + \frac{\partial F}{\partial y}(u, v) \cdot Jf(u).$$

Wenn wir dies nach $Jf(u)$ auflösen, erhalten wir die Formel für die Jacobi-Matrix.

Also ist der entscheidende Punkt, die Differenzierbarkeit von f nachzuweisen. Zur Vereinfachung der Schreibweise dürfen wir $u = 0$, $v = 0$ annehmen. Nach Voraussetzung ist F in $(0, 0)$ differenzierbar. Sei

$$A = \frac{\partial F}{\partial x}(0, 0), \quad B = \frac{\partial F}{\partial y}(0, 0).$$

Dann ist

$$F(x, y) = F(0, 0) + Ax + By + \varphi(x, y)$$

mit $\lim_{(x,y) \rightarrow 0} \varphi(x, y) / \|(x, y)\| = 0$. Einsetzen der bekannten Werte ergibt

$$0 = 0 + Ax + Bf(x) + \varphi(x, f(x)),$$

also

$$f(x) = -B^{-1}Ax - B^{-1}\varphi(x, f(x)). \quad (*)$$

Der kritische Term ist $\varphi(x, f(x))$. Es genügt zu zeigen, daß

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x, f(x))}{\|x\|} = 0,$$

denn dann folgt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{B^{-1}\varphi(x, f(x))}{\|x\|} = 0,$$

und die Gleichung (*) ergibt die Differenzierbarkeit von f in 0 (und beweist noch einmal die Formel für die Jacobi-Matrix). Wir benutzen folgende Behauptung: Es existieren $\delta > 0$ und $C > 0$ mit

$$\|f(x)\| \leq C \cdot \|x\| \text{ für alle } x \in U \text{ mit } \|x\| < \delta. \quad (\dagger)$$

Dann ist für $\|x\| < \delta$

$$\frac{\|\varphi(x, f(x))\|}{\|x\|} \geq \frac{\|\varphi(x, f(x))\|}{\|(x, f(x))\|} \geq \frac{\|\varphi(x, f(x))\|}{\|x\| + \|f(x)\|} \geq \frac{\|\varphi(x, f(x))\|}{(C+1)\|x\|}.$$

Also ist

$$\frac{\|\varphi(x, f(x))\|}{\|x\|} \leq (C+1) \frac{\|\varphi(x, f(x))\|}{\|(x, f(x))\|},$$

und aus

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\|\varphi(x, f(x))\|}{\|(x, f(x))\|} = 0$$

folgt wie gewünscht

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\|\varphi(x, f(x))\|}{\|x\|} = 0.$$

Zu zeigen bleibt die obige Behauptung (\dagger). Wegen

$$\lim_{(x,y) \rightarrow 0} \frac{\varphi(x, y)}{\|(x, y)\|} = 0$$

existiert ein $\delta' > 0$ mit

$$\|\varphi(x, y)\| \leq \frac{1}{2 \cdot \|B^{-1}\|} \cdot \|(x, y)\| \leq \frac{1}{2 \cdot \|B^{-1}\|} \cdot (\|x\| + \|y\|)$$

für alle $(x, y) \in W$ mit $\|(x, y)\| < \delta'$. Wegen der Stetigkeit von f (hier geht sie in den Beweis ein!) existiert ein $\delta > 0$ mit

$$\|(x, f(x))\| < \delta'$$

für alle $x \in U$ mit $\|x\| < \delta$. Also ist bei $\|x\| < \delta$

$$\|\varphi(x, f(x))\| \leq \frac{1}{2 \cdot \|B^{-1}\|} \cdot (\|x\| + \|f(x)\|).$$

Einsetzen in die Gleichung (*) ergibt

$$\|f(x)\| \leq \|B^{-1}A\| \|x\| + \|B^{-1}\| \cdot \frac{1}{2 \cdot \|B^{-1}\|} \cdot (\|x\| + \|f(x)\|).$$

Folglich ist

$$\frac{1}{2} \|f(x)\| \leq \left(\|B^{-1}A\| + \frac{1}{2} \right) \|x\|$$

und wir können $C = 2 \cdot \|B^{-1}A\| + 1$ wählen. □

Der folgende Satz, der im wesentlichen 9.1 und 9.3 zusammenfaßt, ist unser Hauptergebnis in diesem Abschnitt. Grob gesprochen besagt er, daß stetig differenzierbare Gliederungssysteme in „regulären“ Punkten stetig differenzierbar aufgelöst werden können.

Satz 9.4. *Sei $W \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F : W \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Im Punkt $w \in W$ habe die Jacobi-Matrix $JF(w)$ den (maximalen) Rang m . (Man sagt, F sei regulär in w .) Ferner gelte $F(w) = 0$.*

(a) *Dann existieren Indizes, i_1, \dots, i_m , $1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n$, für die die Matrix*

$$\begin{pmatrix} D_{i_1} F_1(w) & \cdots & D_{i_m} F_1(w) \\ \vdots & & \vdots \\ D_{i_1} F_m(w) & \cdots & D_{i_m} F_m(w) \end{pmatrix}$$

invertierbar ist.

(b) *Zur Vereinfachung der Notation seien $k = n - m$, $i_1 = k + 1, \dots, i_m = n$, $u = (w_1, \dots, w_k)$, $v = (w_{k+1}, \dots, w_n)$. Dann existieren Umgebungen U von u und V von v mit folgenden Eigenschaften:*

- (i) $U \times V \subset W$;
- (ii) *zu jedem $x \in U$ existiert genau ein $y \in V$ mit $F(x, y) = 0$;*
- (iii) *die Abbildung $f : U \rightarrow V$, $f(x) = y$, ist stetig differenzierbar, und es ist*

$$Jf(x) = - \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y).$$

Beweis. (a) Da $JF(w)$ den Rang m hat, besitzt diese Matrix m linear unabhängige Spalten. Ihre Indizes seien i_1, \dots, i_m . Dann ist die Matrix $(D_{i_j} F_p(\tilde{w}))$, $j = 1, \dots, m$, $p = 1, \dots, m$, für alle \tilde{w} aus einer Umgebung \tilde{W} von w invertierbar, da die Determinante (als Polynom in den Einträgen der Matrix) stetig ist und F nach Voraussetzung stetig differenzierbar.

(b) Mit der Annahme über i_1, \dots, i_m sind nun die Voraussetzungen von 9.1 erfüllt, wenn wir Umgebung \tilde{U} von u , \tilde{V} von v gewählt haben, für die $\tilde{U} \times \tilde{V} \subset \tilde{W}$. Nach 9.1 existieren Umgebungen U von u , V von v (dort U' bzw. V' genannt), für die (b) richtig ist, nachdem wir in (iii) „stetig differenzierbar“ zu „stetig“ abgeschwächt haben. Nun ergibt 9.3 (beachte die Wahl von \tilde{W}), daß f in jedem $x \in U$ differenzierbar ist. Schließlich ist f sogar stetig differenzierbar, weil F stetig differenzierbar ist und die Matrixinversion ebenfalls stetig ist. (Siehe dazu die folgende Bemerkung.) \square

Bemerkung 9.5. Sei $U \subset \mathbb{R}^{m \times n}$ die Teilmenge der invertierbaren Matrizen. Da die Abbildung

$$\det : \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R},$$

stetig ist, ist U offen. Nach der Cramerschen Regel läßt sich M^{-1} für $M \in U$ in der Form

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} \cdot A(M)$$

schreiben, wobei $A(M)$ die Adjunkte von M ist – ihre Einträge sind Determinanten von Teilmatrizen von M . Da Determinanten Polynome sind, sind alle Komponenten der Abbildung $M \rightarrow M^{-1}$ rationale Funktionen in den Einträgen von M .

Satz 9.4 ist (auch) eine Aussage über die Geometrie der Lösungsmenge stetig differenzierbarer Gleichungssysteme in der Nähe regulärer Punkte:

$$N = \{z : F(z) = 0\} \cap (U \times V)$$

ist Bild von U unter der stetig differenzierbaren Abbildung $x \mapsto (x, f(x))$, also „nur“ eine „glatt verbogene“ Version von U .

Besonders bemerkenswert ist die folgende Variante von Satz 9.4, in der wir die Umkehrbarkeit stetig differenzierbarer Abbildungen untersuchen:

Satz 9.6. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Für $u \in U$ sei die Jacobi-Matrix $Jf(u)$ invertierbar. Dann gibt es eine Umgebung U' von u und eine Umgebung V von $v = f(u)$, so daß U' von f bijektiv auf V abgebildet wird und die Umkehrabbildung f^{-1} auf V stetig differenzierbar ist. Ferner ist

$$Jf^{-1}(y) = \left(Jf(f^{-1}(y)) \right)^{-1}$$

für alle $y \in V$.

Beweis. Wir setzen

$$F(x, y) = y - f(x) \quad \text{für } x \in U, y \in \mathbb{R}^n.$$

Dann ist $F(x, y) = 0$ äquivalent zu $f(x) = y$. Wir wollen diese Gleichung nach x auflösen – deshalb sind die Bezeichnungen relativ zu 9.4 vertauscht!

Nach 9.4 finden wir eine Umgebung U' von u und eine Umgebung V von v , sowie eine stetig differenzierbare Abbildung $g : V \rightarrow U'$, so daß

$$f(x) = y \iff y = g(x) \quad \text{für alle } y \in V, x \in U.$$

Wir setzen nun $U = U' \cap f^{-1}(V)$. Dann ist $f(U) \subset V$, $g(V) \subset U$, $f(g(y)) = y$ für $y \in V$ und $g(f(x)) = x$ für $x \in U$.

Also ist g die Umkehrabbildung von $f|U$. Die Formel für die Jacobi-Matrix ergibt sich aus 9.4 oder direkt aus der Kettenregel. \square

Satz 9.6 sagt, daß man eine stetig differenzierbare Abbildung $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, in einem Punkt, in dem die Funktionaldeterminante nicht verschwindet, „lokal“ umkehren kann. Er verallgemeinert den Satz über die Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion von Funktionen einer Veränderlichen. Für $n \geq 2$ kann man aber die globale Umkehrbarkeit nicht ohne weiteres aus dem Nichtverschwinden der Funktionaldeterminante schließen (im Gegensatz zu auf Intervallen $I \subset \mathbb{R}$ erklärten Funktionen). Wir diskutieren ein Beispiel. Sei

$$U = \{(r, \varphi) : r \in \mathbb{R}, r > 0, \varphi \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2;$$

U ist also die „rechte“ offene Halbebene. Die Abbildung $F : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch

$$F(r, \varphi) = (r \cdot \cos \varphi, r \cdot \sin \varphi).$$

Dann ist

$$\det(JF(r, \varphi)) = \det \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ -\sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} = r(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = r > 0$$

für alle $(r, \varphi) \in U$. Sei

$$(x, y) = F(r, \varphi).$$

Dann ist

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos \varphi = \frac{x}{r}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{r}$$

und

$$(JF(r, \varphi))^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\frac{1}{r} \sin \varphi & \frac{1}{r} \cos \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{-x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

Eine lokale Umkehrung von F kann man für jedes (r, φ) bestimmen. Jedes der Intervalle

$$\begin{aligned} &](2k-1)\pi, 2k\pi[, \quad \left] \left(2k - \frac{1}{2}\right)\pi, \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi \right[, \\ &]2k\pi, (2k+1)\pi[, \quad \left] \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi, \left(2k + \frac{3}{2}\right)\pi \right[, \end{aligned}$$

$k \in \mathbb{Z}$, ist offen und jedes $\varphi \in \mathbb{R}$ fällt in (mindestens) eines von ihnen. Sei I eines der Intervalle. Dann wird

$$\{(r, \varphi) : r > 0, \varphi \in I\}$$

auf eine der offenen Halbebenen abgebildet, und zwar der Reihe nach auf die untere, rechte, obere, linke

Halbebene. Speziell ist $F(U) = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Ist z.B. $\varphi \in I =](2k - \frac{1}{2})\pi, (2k + \frac{1}{2})\pi[$, so wählen wir

$$U = \{(s, \psi) : s > 0, \psi \in I\}$$

als Umgebung U von (r, φ) und die rechte offene Halbebene als Umgebung V von $(x, y) = F(r, \varphi)$. Die lokale Umkehrabbildung ist dann durch

$$f^{-1} : V \rightarrow U, f^{-1}(x, y) = \left(\sqrt{x^2 + y^2}, 2k\pi + \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

gegeben. Ähnlich geht man für die anderen Intervalle vor. Obwohl F lokal umkehrbar ist, ist F wegen der Periodizität der trigonometrischen Funktionen nicht injektiv. Wenn

$$f(r, \varphi) = (x, y)$$

ist, nennt man (r, φ) die *Polarkoordinaten* von (x, y) . Dabei ist φ nur bis auf ein Vielfaches von 2π eindeutig bestimmt.

Am Ende dieses (langen) Abschnitts soll noch eine Methode zur Bestimmung von „Extrema unter Nebenbedingungen“ diskutiert werden, die sogenannte *Lagrangsche Multiplikatoren-Methode*.

Ein Beispiel: Man bestimme die Extrema der Funktion

$$g(x, y) = x \cdot y$$

auf dem Einheitskreis

$$K = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}.$$

Die den Einheitskreis definierende Gleichung ist dabei die Nebenbedingung. Wir wissen, daß wir die Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ überall auf dem Einheitskreis nach x oder y auflösen können, so daß es dann „nur“ noch darauf ankommt, die Extrema von auf Intervallen definierten Funktionen einer Veränderlichen zu bestimmen. Der Witz des folgenden Satzes besteht darin, die explizite Auflösung der Nebenbedingungen zu vermeiden.

Satz 9.7. Sei $W \subset \mathbb{R}^n$ offen, $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, $F : W \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m < n$, eine stetig differenzierbare Abbildung.

Es gelte $F(w) = 0$ für ein $w \in W$ und es gebe eine Umgebung W' von w mit

$$g(w) \geq g(z) \quad (\text{oder } g(w) \leq g(z))$$

für alle $z \in W'$ mit $F(z) = 0$. Ferner sei $\text{rang } JF(w) = m$. Dann existieren $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ mit

$$\text{grad } g(w) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \text{grad } F_i(w).$$

Man sagt, daß g ein lokales Extremum in w unter der Nebenbedingung $F(z) = 0$ hat.

Beachte, daß die behauptete Gleichung eine wirkliche Bedingung darstellt, denn $\text{grad } g(w) \in \mathbb{R}^n$. Die Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ heißen *Lagrangsche Multiplikatoren*. (Manchmal werden auch $-\lambda_1, \dots, -\lambda_m$ so genannt.)

Beweis. Nach Verkleinerung von W' und Vertauschung der Komponenten dürfen wir annehmen, daß W' von der Form $U \times V$ ist, $U \subset \mathbb{R}^k$, $k = n - m$, $V \subset \mathbb{R}^m$ und eine stetig differenzierbare Abbildung $f : U \rightarrow V$ existiert mit

$$F(x, y) = 0 \iff y = f(x)$$

für $x \in U$, $y \in V$. Also ist $w = (u, v)$ ein lokales Extremum der Funktion

$$h : U \rightarrow \mathbb{R},$$

$h(x) = g(x, f(x))$. Es ist

$$\begin{aligned} 0 = \text{grad } h(u) &= \frac{\partial g}{\partial x}(w) + \frac{\partial g}{\partial y}(w) \cdot \left[- \left(\frac{\partial F}{\partial y}(w) \right)^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial x}(w) \right] \\ &= \frac{\partial g}{\partial x}(w) - \left[\frac{\partial g}{\partial y}(w) \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial y}(w) \right)^{-1} \right] \cdot \frac{\partial F}{\partial x}(w). \end{aligned}$$

Das Produkt $\frac{\partial g}{\partial y}(w) \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial y}(w) \right)^{-1}$ ist eine $1 \times m$ -Matrix

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_m).$$

Per Definition ist also

$$\frac{\partial g}{\partial y}(w) = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \frac{\partial F}{\partial y}(w)$$

und die obige Gleichung ergibt außerdem

$$\frac{\partial g}{\partial x}(w) = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \cdot \frac{\partial F}{\partial x}(w).$$

Die Zusammenfassung der beiden letzten Gleichungen liefert die Behauptung. \square

Wir kommen auf das obige Beispiel zurück. Zusätzlich zur Gleichung

$$x^2 + y^2 = 1$$

haben wir also noch die Gleichung(en)

$$\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}.$$

Insgesamt also das Gleichungssystem

$$x^2 + y^2 = 1,$$

$$2\lambda x - y = 0,$$

$$x - 2\lambda y = 0.$$

Es folgt $2\lambda x^2 = 2\lambda y^2$. Wegen der ersten Gleichung ist $\lambda \neq 0$, also $|x| = |y|$.
Extrema können folglich nur an den Punkten

$$\frac{1}{2} \left(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2} \right)$$

vorliegen. Wie stets bei der Bestimmung lokaler Extrema ist nun noch zu entscheiden, wo wirklich ein Extremum vorliegt und welcher Art es ist. Bei diesem Beispiel hilft schon der Vergleich der Funktionswerte weiter: In den Punkten $(x, y)_{1,2} = \pm 1/2(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ist $g(x) > 0$, in $(x, y)_{3,4} = \pm 1/2(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ist $g(x) < 0$. In $x_{1,2}$ muß also ein lokales Maximum, in $(x, y)_{3,4}$ ein lokales Minimum sein.

ABSCHNITT 10

Komplexe Funktionen

Aus der Algebra wissen wir, daß \mathbb{R}^2 mit der Vektoraddition und der Multiplikation

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

einen Körper bildet, den man den *Körper \mathbb{C} der komplexen Zahlen* nennt. Mit

$$i = (0, 1)$$

läßt sich jedes $z \in \mathbb{C}$ eindeutig in der Form

$$z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

schreiben; dabei haben wir $x \in \mathbb{R}$ mit $(x, 0) \in \mathbb{C}$ identifiziert. Man nennt x den *Realteil*, y den *Imaginärteil* von z ,

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Eine wichtige Operation ist die komplexe Konjugation:

$$\overline{x + iy} = x - iy.$$

Die Abbildung $z \rightarrow \bar{z}$ ist ein Automorphismus des \mathbb{R} -Vektorraums \mathbb{C} , ja (sogar) ein Automorphismus des Körpers \mathbb{C} , denn es gilt

$$\overline{\bar{z} \bar{w}} = z w \quad \text{für alle } z, w \in \mathbb{C}.$$

Man nennt

$$|z| = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$$

den Betrag von z . Er ist also nichts anderes als die Norm von z als Element von \mathbb{R}^2 . Beachte, daß

$$|zw| = |z||w| \quad \text{für alle } z, w \in \mathbb{C},$$

denn $\overline{\bar{z} \bar{w}} = z w$.

Alle für den metrischen Raum \mathbb{R}^2 eingeführten Begriffe können wir direkt auf \mathbb{C} anwenden. Insbesondere ist klar, was eine konvergente Folge in \mathbb{C} ist und wann eine auf einer Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$ definierte Abbildung $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig ist. Solche Abbildungen heißen *komplexe Funktionen auf U* .

Auch die wesentlichen Sätze über unendliche Reihen bleiben im Komplexen unverändert gültig: das Cauchy-Kriterium, die Konvergenz absolut konvergenter Reihen, deren Invarianz unter beliebigen Umordnungen, das Majoranten-

Quotienten-, Wurzelkriterium und schließlich das Cauchy-Produkt. Die Beweise lassen sich direkt übertragen.

Ein neuer Aspekt tritt jedoch bei der Differenzierbarkeit auf:

Definition. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $z \in U$. Man nennt $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ in z (*komplex*) differenzierbar, falls

$$\lim_{w \rightarrow z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}$$

existiert. Wir setzen dann

$$f'(z) = \lim_{w \rightarrow z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}$$

und sprechen (wie bei reellen Funktionen einer Veränderlichen) von der *Ableitung von f in z* .

Das Neue (an dieser vertrauten Definition) ist, daß die komplexe Differenzierbarkeit eine schärfere Eigenschaft als die reelle Differenzierbarkeit ist:

Satz 10.1. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion, $z \in U$. Dann sind äquivalent:

- (a) f ist in z komplex differenzierbar;
- (b) f ist (als Abbildung von $U \subset \mathbb{R}^2$ nach \mathbb{R}^2) in z reell differenzierbar und für das totale Differential $Df(z)$ gilt

$$(Df(z))(\lambda w) = \lambda (Df(z))(w) \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{C}, \quad w \in \mathbb{C};$$

- (c) f ist in z reell differenzierbar und es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial x}(z) &= \frac{\partial \operatorname{Im}(f)}{\partial y}(z) \\ \frac{\partial \operatorname{Im}(f)}{\partial x}(z) &= -\frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial y}(z). \end{aligned}$$

(Diese Gleichungen heißen Cauchy-Riemannsches Differentialgleichungen.)

Kurz gefaßt lautet (a) \iff (b): f ist in z komplex differenzierbar genau dann, wenn es reell differenzierbar ist und das totale Differential (nicht nur reell-, sondern sogar) komplex-linear ist.

Sei $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine \mathbb{R} -lineare Funktion. Dann ist φ genau dann \mathbb{C} -linear, wenn

$$\varphi(iz) = i\varphi(z)$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt. Man rechnet sofort nach, daß dies genau dann gilt, wenn die Matrix von φ (bezüglich der \mathbb{R} -Basis $1, i$) die Gestalt

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

hat. Damit ist schon klar, daß (b) und (c) äquivalent sind. Es ist $\varphi(z) = (a + ib)z$.

Beweis von Satz 10.1. Nach dem Vorangegangenen genügt es, die Äquivalenz von (a) und (b) zu beweisen.

(a) \Rightarrow (b) Es ist

$$\begin{aligned} f(w) &= f(z) + f'(z)(w - z) + \left(\frac{f(w) - f(z)}{w - z} - f'(z) \right) (w - z) \\ &= f(z) + f'(z)(w - z) + \varphi(w), \end{aligned}$$

wobei gemäß (a)

$$\lim_{w \rightarrow z} \frac{|\varphi(w)|}{|w - z|} = \lim_{w \rightarrow z} \left| \frac{f(w) - f(z)}{w - z} - f'(z) \right| = 0.$$

Da $u \mapsto f'(z) \cdot u$ \mathbb{R} -linear ist, ist f in z reell total differenzierbar, und $u \mapsto f'(z) \cdot u$ das totale Differential. Dieses ist offensichtlich \mathbb{C} -linear.

(b) \Rightarrow (a) Jede \mathbb{C} -lineare Abbildung $L : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist von der Form $L(u) = \lambda \cdot u$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$. Folglich

$$f(w) = f(z) + \lambda \cdot (w - z) + \varphi(w)$$

mit $\lim_{w \rightarrow z} \varphi(w)/|w - z| = 0$. Wir erhalten

$$\frac{f(w) - f(z)}{w - z} - \lambda = \frac{\varphi(w)}{w - z}$$

und $\lim_{w \rightarrow z} \varphi(w)/(w - z) = 0$, weil $\lim_{w \rightarrow z} |\varphi(w)|/|w - z| = 0$. □

Die Rechenregeln für Ableitungen übertragen sich wortwörtlich vom Reellen ins Komplexe. Man kann dazu entweder die „reellen“ Beweise abschreiben oder die Rechenregeln für totale Differentiale in Verbindung 10.1 benutzen.

Speziell sind Polynome auf ganz \mathbb{C} differenzierbar und rationale Funktionen auf ihrem Definitionsbereich. Die Ableitungen berechnen sich wie im Reellen.

Explizit halten wir aber folgende Aussage fest:

Satz 10.2. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und (f_n) eine Folge von Funktionen $f_n : U \rightarrow \mathbb{C}$.

- (a) Wenn alle f_n stetig sind und die Folge (f_n) gleichmäßig konvergiert, so ist auch die Grenzfunktion $f = \lim f_n$ stetig.
- (b) Wenn alle f_n stetig differenzierbar sind, die Folge (f_n) punktweise konvergiert und die Folge der Ableitungen gleichmäßig konvergiert, so ist die Grenzfunktion f ebenfalls stetig differenzierbar und es gilt $f' = \lim f'_n$.

Beweis. Teil (a) ist natürlich nur ein Spezialfall des allgemeinen Satzes über gleichmäßig konvergente Folgen von Abbildungen auf metrischen Räumen (und hier nur aus „Symmetriegründen“ aufgeführt).

Bei Teil (b) ziehen wir den entsprechenden reellen Satz heran. Er garantiert, daß f reell partiell stetig differenzierbar ist. Folglich ist f reell stetig differenzierbar.

Da die Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen sich auf die Grenzfunktion übertragen, ist diese dann auch komplex (stetig) differenzierbar. Die Formel $f' = \lim f'_n$ folgt aus der entsprechenden Aussage für die partiellen Ableitungen. \square

Satz 10.2 ist wichtig, weil er uns erlaubt, mittels des folgenden Satzes die Ableitungen von Funktionen zu bestimmen, die durch Potenzreihen definiert sind. Um zu betonen, daß es sich im bestmöglichen Sinn um einen Kreis handelt, schreiben wir im folgenden $K_r(z)$ statt $U_r(z)$.

Satz 10.3. Sei (a_k) eine Folge komplexer Zahlen und $z_0 \in \mathbb{C}$. Die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

konvergiere in $w \in \mathbb{C}$. Wir setzen $R = |w - z_0|$. Dann gilt:

- (a) Die Potenzreihe konvergiert auf jedem offenen Kreis $K_r(z_0)$ mit $r < R$ gleichmäßig.
- (b) Ebenso konvergieren

$$\sum_{k=0}^{\infty} k a_k (z - z_0)^{k-1} \text{ und } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} a_k (z - z_0)^{k+1}$$

gleichmäßig auf jedem dieser Kreise.

Der Beweis von Satz 10.3 überträgt sich wortwörtlich aus dem Reellen ins Komplexe. Zunächst erlaubt er uns, wieder den Konvergenzradius zu definieren:

Definition. Der Konvergenzradius von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ sei

$$R = \sup \left\{ |w - z_0| : \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \text{ konvergiert} \right\}.$$

Ferner erhalten wir in Verbindung mit 10.2:

Satz 10.4. Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ habe den Konvergenzradius R . Dann konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ auf $K_R(z_0)$ gegen eine unendlich oft differenzierbare Funktion f auf $K_R(z_0)$. Für alle $z \in K_R(z_0)$ ist

$$f'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k (z - z_0)^{k-1}.$$

Ferner ist durch

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} a_k (z - z_0)^{k+1}$$

eine Stammfunktion von f auf $K_R(z_0)$ gegeben.

Wir übertragen nun Exponential- und Winkelfunktionen ins Komplexe:

$$\begin{aligned}\exp(z) &= e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \\ \sin(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}, \\ \cos(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}.\end{aligned}$$

Die auf dem Cauchy-Produkt beruhenden Additionstheoreme, also

$$\begin{aligned}\exp(z_1 + z_2) &= \exp(z_1) \cdot \exp(z_2), \\ \sin(z_1 + z_2) &= \sin(z_1) \cos(z_2) + \cos(z_1) \sin(z_2), \\ \cos(z_1 + z_2) &= \cos(z_1) \cos(z_2) - \sin(z_1) \sin(z_2),\end{aligned}$$

gelten im Komplexen weiter. Aus 10.4 ergibt sich auch

$$\exp'(z) = \exp(z), \quad \sin'(z) = \cos(z), \quad \cos'(z) = -\sin(z)$$

für alle $z \in \mathbb{C}$. Neu kommt hinzu die Beziehung

Satz 10.5 (Eulersche Formel). *Für alle $z \in \mathbb{C}$ ist*

$$\exp(z) = \cos(iz) - i \sin(iz).$$

Speziell gilt

$$\exp(ix) = \cos(x) + i \sin(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beweis. Für die erste Formel setzt man einfach in die Potenzreihen ein. Aus ihr ergibt sich

$$\begin{aligned}\exp(ix) &= \cos(i^2x) - i \sin(i^2x) \\ &= \cos(-x) - i \sin(-x) \\ &= \cos(x) + i \sin(x).\end{aligned} \quad \square$$

Aus 10.5 ergibt sich, daß die komplexe Exponentialfunktion im Gegensatz zur reellen *nicht* injektiv ist. Sie ist vielmehr periodisch mit der Periode $2\pi i$, weil \cos und \sin periodisch mit Periode 2π sind. Die Exponentialfunktion bildet \mathbb{C} surjektiv auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ab.

Mit $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ erhalten wir

$$z = x + iy = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = r e^{i\varphi}.$$

Diese Darstellung heißt *komplexe Polarkoordinatendarstellung von z* . Mit $w = se^{i\psi}$ ergibt sich

$$zw = rse^{i(\varphi+\psi)},$$

und damit können wir die Multiplikation komplexer Zahlen geometrisch deuten: man multipliziert z und w , indem man die Beträge r und s multipliziert und die „Argumente“ φ und ψ addiert. Damit ist auch klar, wie man in \mathbb{C} Wurzeln zieht:

Satz 10.6. *Sei $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, und $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Dann existieren paarweise verschiedene komplexe Zahlen w_1, \dots, w_n mit*

$$w_k^n = z \quad \text{für} \quad k = 1, \dots, n.$$

Beweis. Sei zunächst $z = 1$. Wir setzen dann

$$\zeta_k = \exp\left(k \cdot \frac{2\pi i}{n}\right), \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Dann sind die ζ_k paarweise verschieden und es gilt $\zeta_k^n = 1$. ($\zeta_0, \dots, \zeta_{n-1}$ heißen *n -te Einheitswurzeln*.) Für allgemeines $z = re^{i\varphi}$ sei

$$w_1 = \sqrt[n]{r} \cdot \exp\left(\frac{\varphi}{n}i\right),$$

und

$$w_k = w_1 \cdot \zeta_{k-1}, \quad k = 1, \dots, n. \quad \square$$

Wir werden später sehen, daß eine noch viel allgemeinere Aussage als 10.6 richtig ist: jedes Polynom $a_n z^n + \dots + a_0$, $a_i \in \mathbb{C}$, zerfällt über \mathbb{C} in Linearfaktoren!

Die gleichen Schwierigkeiten, die uns hinderten, die Polarkoordinatenabbildung global umzukehren, hindern uns auch daran, einen global auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ definierten Logarithmus als Umkehrfunktion von \exp zu finden – \exp ist ja schließlich nicht injektiv. Sei

$$U = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0 \text{ oder } \operatorname{Im}(z) \neq 0\};$$

U entsteht also aus \mathbb{C} durch Wegnahme der negativen reellen Halbachse (man sagt auch, U sei die *längs dieser Halbachse geschlitzte Ebene*). Für $w \in U$ setzen wir

$$\log w = (\log s) + i\varphi$$

wobei $w = s \cdot e^{i\varphi}$ mit $-\pi < \varphi < \pi$. (Die Punkte von U sind genau diejenigen, die eine solche Darstellung zulassen.) Für alle $w \in U$ ist dann

$$\begin{aligned} \exp(\log w) &= \exp(\log(s)) + \exp(i\varphi) \\ &= s \cdot e^{i\varphi} \\ &= w \end{aligned}$$

und für $z \in \mathbb{C}$, $-\pi < \operatorname{Im} z < \pi$ ist

$$\log(\exp(z)) = z.$$

Die auf U definierte Funktion \log heißt auch *Hauptzweig des komplexen Logarithmus*. (Wir können sie zwar injektiv, nicht aber stetig auf \mathbb{C} fortsetzen.)

Die Cauchysche Integralformel

Ein wichtiges Hilfsmittel der komplexen Analysis sind Wegintegrale. Dazu haben wir die uns vertrauten Wegintegrale nur „komplex“ zu lesen. Sei $w : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ein (reell) stetig differenzierbarer Weg. Dann betrachten wir den Tangentialvektor für $t \in [a, b]$ als komplexe Zahl:

$$w'(t) = (\operatorname{Re}(w))'(t) + i(\operatorname{Im}(w))'(t).$$

Für eine stetige Funktion f auf $w([a, b])$ setzen wir dann

$$\int_w f = \int_w f(z)dz = \int_a^b f(w(t)) \cdot w'(t)dt,$$

wobei das Integral komplexwertig zu verstehen ist:

$$\int_a^b f(w(t)) \cdot w'(t)dt = \int_a^b \operatorname{Re}(f(w(t))w'(t))dt + i \int_a^b \operatorname{Im}(f(w(t))w'(t))dt.$$

Wir schlüsseln dies noch weiter auf. Sei

$$f_1 = \operatorname{Re}(f), \quad f_2 = \operatorname{Im}(f).$$

Dann ist

$$\int_w f(z)dz = \int_w (f_1, -f_2) + i \int_w (f_2, f_1),$$

wobei auf der rechten Seite nun Wegintegrale über reelle Vektorfelder stehen. Das komplexe Wegintegral erfaßt also zwei verschiedene, zu einander orthogonale reelle Vektorfelder. Das Standardbeispiel:

$$w : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, \quad w(t) = z_0 + r e^{it}, \quad z_0 \in \mathbb{C} \text{ beliebig, } r > 0,$$

$$f(z) = \frac{1}{z - z_0} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}, z \neq z_0.$$

Dann ist

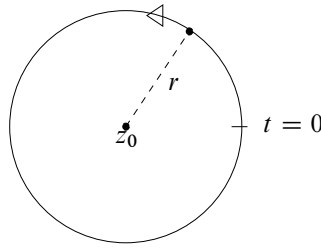
$$w'(t) = i r e^{it} = i(w(t) - z_0).$$

Folglich

$$\int_w f(z)dz = \int_0^{2\pi} f(w(t))w'(t)dt = \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i.$$

Den soeben betrachteten speziellen Integrationsweg bezeichnen wir mit $\partial K_r(z_0)$.

Regeln für komplexe Wegintegrale:

ABBILDUNG 1. Der Kreisrand $\partial K_r(z_0)$

Satz 11.1. Sei $w : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ein stetig differenzierbarer Weg. Ferner seien f, f_1, f_2 stetige Funktionen auf $w([a, b])$ und $c \in \mathbb{C}$. Dann gilt:

- (a) $\int_w (f_1(z) + f_2(z))dz = \int_w f_1(z)dz + \int_w f_2(z)dz,$
 (b) $\int_w c f_1(z)dz = c \int_w f_1(z)dz,$
 (c) Für $d \in [a, b]$, $w_1 = w \mid [a, d]$, $w_2 = w \mid [d, b]$ ist

$$\int_{w_1} f(z)dz + \int_{w_2} f(z)dz = \int_w f(z)dz,$$

- (d) $|\int_w f(z)dz| \leq L(w) \cdot \sup\{|f(z)| : z \in w([a, b])\},$
 (e) $\int_w f(z)dz$ ist invariant unter orientierungserhaltenden Parametertransformationen und multipliziert sich mit -1 bei Orientierungsumkehr.
 (f) Konvergiert die Folge stetiger Funktionen (f_n) gleichmäßig auf $w([a, b])$ gegen f , so ist

$$\int_w f(z)dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_w f_n(z)dz.$$

Beweis. (a), (b), (c) und (e) lassen sich direkt über die oben erwähnte Darstellung durch zwei reelle Vektorfelder auf die entsprechenden reellen Aussagen zurückführen. Zu (d):

$$\begin{aligned} \left| \int_w f(z)dz \right| &= \left| \int_a^b f(w(t))w'(t)dt \right| \\ &\leq \int_a^b |f(w(t))w'(t)| dt, & (*) \\ &= \int_a^b |f(w(t))||w'(t)| dt \\ &\leq \sup\{|f(w(t))| : t \in [a, b]\} \cdot \int_a^b |w'(t)| dt \\ &= \sup\{|f(z)| : z \in w([a, b])\} \cdot L(w). \end{aligned}$$

Die Ungleichung (*) haben wir in 4.3 bewiesen.

Zu (f): Nach Voraussetzung gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{|f(z) - f_n(z)| : z \in w([a, b])\} = 0$$

und f ist stetig. Nach (d) ist

$$\left| \int_w f(z) dz - \int_w f_u(z) dz \right| \leq L(w) \cdot \sup\{|f(z) - f_u(z)| : z \in w([a, b])\}.$$

Daraus folgt die Behauptung. \square

Wegen Teil (c) können wir das Wegintegral auf stückweise stetig differenzierbare Wege erweitern. Alle Aussagen von 11.1 bleiben dabei richtig. Sei nun $U \subset \mathbb{C}$ offen und f eine auf U differenzierbare Funktion. In den Wegintegralen $\int_w f(z) dz$ treten die reellen Vektorfelder

$$(\operatorname{Re} f, -\operatorname{Im} f) \quad \text{und} \quad (\operatorname{Im} f, \operatorname{Re} f)$$

auf. Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen besagen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial y} &= -\frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial x}, \\ \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial y} &= \frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x}. \end{aligned}$$

Diese Bedingung tritt gerade in 8.6 auf, der uns die Existenz von Stammfunktionen garantiert, jedenfalls dann, wenn die partiellen Ableitungen stetig sind und U sternförmig ist.

Definition. Sei f eine auf der offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$ definierte Funktion. Wir sagen, f sei *holomorph*, wenn f auf U stetig (komplex) differenzierbar ist.

Satz 11.2. Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine sternförmige offene Menge und f holomorph auf U . Dann besitzt f eine Stammfunktion auf U .

Beweis. Sei U sternförmig bezüglich z_0 . Für $u \in U$ betrachten wir wie in 8.6 den Weg

$$w_u : [0, 1] \mapsto U, \quad w_u(t) = (1-t)z_0 + tu,$$

und setzen

$$F(u) = \int_{w_u} f(z) dz.$$

Mit $f_1 = \operatorname{Re} f$, $f_2 = \operatorname{Im} f$ haben wir ja

$$\int_{w_u} f(z) dz = \int_{w_u} (f_1, -f_2) + i \int_{w_u} (f_2, f_1) = \operatorname{Re} F(u) + i \operatorname{Im} F(u).$$

Nach 8.6 sind also $\operatorname{Re} F$ und $\operatorname{Im} F$, und damit F , reell differenzierbar. Ferner ist

$$\begin{aligned}\frac{\partial \operatorname{Re} F}{\partial x} &= f_1, & \frac{\partial \operatorname{Re} F}{\partial y} &= -f_2, \\ \frac{\partial \operatorname{Im} F}{\partial x} &= f_2, & \frac{\partial \operatorname{Im} F}{\partial y} &= f_1.\end{aligned}$$

Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen sind erfüllt, und es gilt $F'(u) = f(u)$ wie gewünscht. \square

Bemerkung 11.3. Es ist eine überraschende, von uns nicht bewiesene Tatsache, daß man in 8.6 und damit auch in 11.2 die Stetigkeit der Ableitungen *nicht* zu fordern braucht (Lemma von Goursat). Daher kann man auch in der Definition von „holomorph“ diese Bedingung weglassen, wie in der komplexen Analysis allgemein üblich.

Wenn eine Stammfunktion existiert, hängt das Wegintegral wie im Reellen nur von Anfangs- und Endpunkt ab:

Satz 11.4. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, f stetig auf U und F eine Stammfunktion von f . Dann ist für jeden stückweise stetig differenzierbaren Weg $w : [a, b] \rightarrow U$

$$\int_w f(z) dz = F(w(b)) - F(w(a)).$$

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus 8.2 mittels der Reduktion auf zwei reelle Vektorfelder. \square

Speziell ist

$$\int_w f(z) dz = 0, \quad \text{falls } w(b) = w(a).$$

Ein solcher Weg heißt *geschlossen*.

Die Kombination aus 11.2 und 11.4 ist der *Cauchysche Integralsatz* für sternförmige Gebiete (und unsere Definition von Holomorphie).

Satz 11.5. Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist

$$\int_w f(z) dz = 0$$

für jeden geschlossenen, stückweise stetig differenzierbaren Weg w in U .

Wir haben oben an einem Beispiel gesehen, daß die Aussage von 11.5 nicht auf beliebige Gebiete erweiterbar ist ($U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$). Dennoch ist er aber auch in solchen Fällen ein nützliches Hilfsmittel.

Satz 11.6. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $z_1, z_2 \in U$, $r_1, r_2 > 0$. Es gelte

$$\overline{K}_{r_1}(z_1), \overline{K}_{r_2}(z_2) \subset U.$$

Es sei $w_1 = \partial K_{r_1}(z_1)$, $w_2 = \partial K_{r_2}(z_2)$. Ferner sei $z_0 \in K_{r_1}(z_1) \cap K_{r_2}(z_2)$. Dann ist

$$\int_{w_1} f(z) dz = \int_{w_2} f(z) dz$$

für jede auf $U \setminus \{z_0\}$ holomorphe Funktion f .

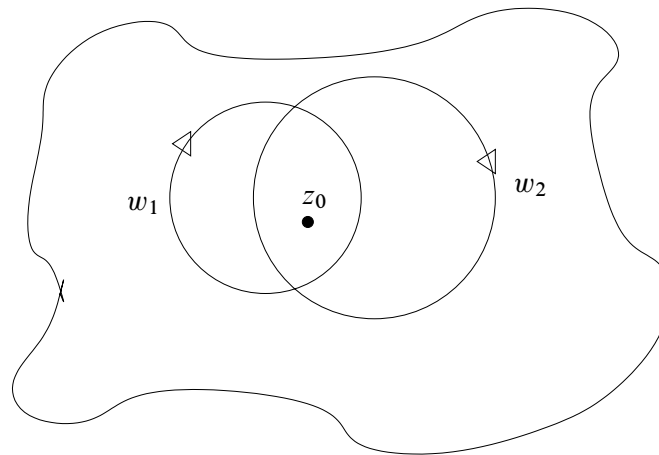


ABBILDUNG 2. Zwei Kreise, die z_0 umlaufen

Beweis. Wir wählen eine Gerade durch z_0 und zerschneiden die Kreise in jeweils zwei Bögen

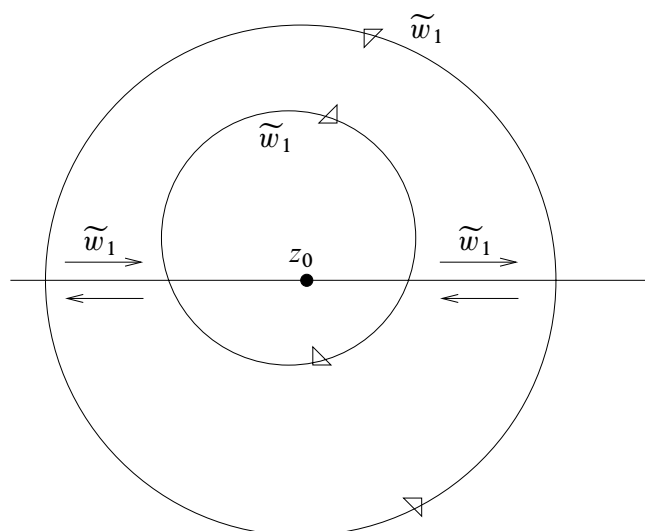


ABBILDUNG 3. Verbindung der Kreise durch Strecken

Die aus Kreissegmenten und Verbindungsstrecken zusammengesetzten Wege \tilde{w}_1 und \tilde{w}_2 verlaufen dann in sternförmigen Gebieten, auf denen f holomorph ist.

(Beachte, daß es $\tilde{r}_1 > r_1, \tilde{r}_2 > r_2$ mit $K_{\tilde{r}_i}(z_i) \subset U$ gibt!). Also ist

$$\int_{\tilde{w}_1} f(z) dz = \int_{\tilde{w}_2} f(x) dz = 0.$$

Erst recht ist

$$\int_{\tilde{w}_1} f(z) dz + \int_{\tilde{w}_2} f(z) dz = 0.$$

In dieser Gleichung heben sich die Integrale längs der Verbindungsstrecken heraus, weil diese in jeweils entgegengesetzten Richtungen durchlaufen werden. Ferner wird einer der Kreise „falsch“ herum durchlaufen. Wenn wir die Orientierung umkehren, erhalten wir die gewünschte Gleichung. \square

Eine erste Anwendung: Für jedes $z \in K_r(z_0)$ (und nicht nur für $z = z_0$) ist

$$\int_{\partial K_r(z_0)} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = 2\pi i.$$

Nach 11.6 stimmt dieses Integral ja mit

$$\int_{\partial K_r(z)} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = 2\pi i$$

überein.

Nun erhalten wir leicht die *Cauchysche Integralformel*:

Satz 11.7. Sei f eine holomorphe Funktion auf der offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$. Für $z_0 \in U, r > 0$ sei $\overline{K}_r(z_0) \subset U$. Dann ist

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_r(z_0)} \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_r(z_0)} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= f(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_r(z_0)} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta. \end{aligned}$$

Dabei haben wir die dem Satz vorangegangene Rechnung benutzt. Sei nun

$$g(\zeta) = \begin{cases} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} & \text{für } \zeta \neq z, \\ f'(z) & \text{für } \zeta = z. \end{cases}$$

Die Funktion g ist erstens auf $U \setminus \{z\}$ holomorph. Nach 11.6 ist deshalb

$$\int_{\partial K_\varepsilon(z_0)} g(\zeta) d\zeta = \int_{\partial K_r(z)} g(\zeta) d\zeta,$$

wenn wir nur ε so klein wählen, daß $\overline{K_\varepsilon}(z) \subset U$. Zweitens ist g stetig in z , weil f auch in z differenzierbar ist. Also ist $g(\zeta)$ auf einer gewissen Umgebung V von z beschränkt, z.B.

$$|g(\zeta)| \leq M \quad \text{für alle } \zeta \in V.$$

Wenn dann $\overline{K_\varepsilon}(z) \subset V$, so

$$\left| \int_{\partial K_\varepsilon(z)} g(\zeta) d\zeta \right| \leq 2\pi\varepsilon \cdot M \rightarrow 0$$

mit $\varepsilon \rightarrow 0$. Wie gewünscht, folgt

$$\int_{\partial K_r(z_0)} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta = 0. \quad \square$$

Die erste, überraschende Konsequenz aus 11.7: Die Funktionswerte im Innern des Kreises $K_r(z_0)$ sind vollständig durch diejenigen auf dem Kreisrand bestimmt. Dies ist ein erstes Indiz für die Stärke des Begriffs „holomorph“.

Holomorphe Funktionen

In diesem Abschnitt wollen wir die überraschenden Eigenschaften holomorpher Funktionen herleiten oder zumindest erwähnen, die sich aus dem Cauchyschen Integralsatz und der Cauchyschen Integralformel ergeben. Als erstes sehen wir, daß sich eine holomorphe Funktion an jedem Punkt z_0 ihres Definitionsbereichs U in eine Potenzreihe entwickeln läßt, die sogar auf dem größten in U enthaltenen offenen Kreis mit Mittelpunkt z_0 konvergiert.

Satz 12.1. *Sei f eine holomorphe Funktion auf der offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$ und $z_0 \in U$. Der Kreis $K_r(z_0)$ sei in U enthalten. Dann existieren komplexe Zahlen a_k , so daß*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

für alle $z \in K_r(z_0)$. Insbesondere ist f unendlich oft differenzierbar, und für alle k ist $a_k = (f^{(k)}(z_0))/k!$.

Beweis. Es ist

$$K_r(z_0) = \bigcup_{0 < R < r} K_R(z_0).$$

Daher genügt es zu zeigen, daß die behauptete Reihenentwicklung auf $K_R(z_0)$ für jedes $R < r$ existiert. Satz 10.4 zeigt dann, daß $a_k = (f^{(k)}(z_0))/k!$ für alle k ist und die Reihenentwicklung daher unabhängig von R .

Nach der Cauchyschen Integralformel gilt für $z \in K_R(z_0)$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_R(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Für alle $\zeta \in \partial K_R(z_0)$ ist $|z - z_0|/|\zeta - z_0| < 1$ und

$$\begin{aligned} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} &= \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} (z - z_0)^k, \end{aligned}$$

weil die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} u^k$ für alle $u \in \mathbb{C}$ mit $|u| < 1$ gegen $1/(1 - u)$ konvergiert.

Die Funktion f ist auf $\partial K_R(z_0)$ beschränkt, etwa $|f(\zeta)| \leq M$ für alle $\zeta \in \partial K_R(z_0)$. Damit ist

$$\left| \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} (z - z_0)^k \right| \leq \frac{M}{R^{k+1}} \cdot \rho^k = \frac{M}{R} \cdot \left(\frac{\rho}{R}\right)^k, \quad \rho = |z - z_0|.$$

Nach dem Weierstraßschen Majorantenkriterium konvergiert die Reihe daher gleichmäßig und wir können gliedweise integrieren:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_R(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta \right) (z - z_0)^k.$$

Damit ist die gesuchte Darstellung gefunden. \square

Wir erhalten insbesondere die Cauchyschen Integralformeln für die Ableitungen von f :

Satz 12.2. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, f holomorph auf U , $z_0 \in U$ und $\overline{K}_r(z_0) \subset U$. Dann gilt:

$$g^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial K_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta.$$

Beweis. Nach 11.6 können wir das Integral über $\partial K_r(z_0)$ durch ein Integral über den Rand eines Kreises mit Mittelpunkt z ersetzen. In diesem Fall haben wir die Formel im Beweis von 12.1 bereits bewiesen. \square

Alternativ kann man Satz 12.2 durch „Differentiation unter dem Integralzeichen“ gewinnen. Er liefert uns die Abschätzung

$$\left| \frac{f^{(k)}(z)}{k!} \right| \leq M \cdot \frac{1}{r^k}$$

wobei $M = \sup\{|f(\zeta)| : \zeta \in \partial K_r(z_0)\}$.

Satz 12.3. Sei f eine auf \mathbb{C} definierte holomorphe Funktion. Wenn f beschränkt ist, so ist f konstant.

Beweis. Für $k \geq 1$ gilt

$$\left| \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \right| \leq M \cdot \frac{1}{r^k} \rightarrow 0$$

für $r \rightarrow \infty$, wenn $|f(z)| \leq M$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Satz 12.1 liefert die Behauptung. \square

Satz 12.3 ist der *Satz von Liouville*. Er impliziert den *Fundamentalsatz der Algebra*:

Satz 12.4. Sei $f = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ ein Polynom des Grades $M > 0$, $a_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, n$. Dann besitzt f eine Nullstelle.

Beweis. Wenn f keine Nullstelle besitzt, ist $1/f$ eine auf ganz \mathbb{C} definierte rationale Funktion. Für alle z ist

$$|f(z)| \geq |a_n||z|^n - (|a_{n-1}||z|^{n-1} + \dots + |a_0|).$$

Für $x \rightarrow \infty$ strebt auch das Polynom

$$|a_n|x^n - (|a_{n-1}|x^{n-1} + \dots + |a_0|)$$

gegen ∞ . Daher ist $1/f$ auf \mathbb{C} beschränkt, folglich konstant nach dem Satz von Liouville, ein Widerspruch. \square

Mittels Abspalten von Linearfaktoren und Induktion über n folgt, daß jedes Polynom positiven Grades über \mathbb{C} in Linearfaktoren zerfällt.

Ohne Beweis wollen wir noch die folgenden zwei Sätze erwähnen. Der erste ist das *Maximumprinzip*:

Satz 12.5. *Die holomorphe Funktion f auf der offenen Menge U sei nicht konstant. Dann besitzt $|f|$ kein Maximum auf U .*

Der zweite Satz ist der Identitätssatz für holomorphe Funktionen:

Satz 12.6. *Sei U offen und zusammenhängend. Wenn für zwei holomorphe Funktionen f und g auf U die Menge $\{z : f(z) = g(z)\}$ einen Häufungspunkt in U hat, so ist $f = g$.*

In der reellen Analysis muß man unterscheiden zwischen differenzierbaren, stetig differenzierbaren, . . . , unendlich oft differenzierbaren und schließlich den analytischen Funktionen, also solchen Funktionen, die in jedem Punkt ihres Definitionsbereiches in eine Potenzreihe entwickelt werden können. Es ist, milde ausgedrückt, bemerkenswert, daß in der komplexen Analysis dieser Unterschied nicht besteht: Jede holomorphe Funktion ist analytisch. (Wir weisen noch einmal darauf hin, daß man in der Definition von „holomorph“ nur die Differenzierbarkeit zu fordern braucht.)

Die Sätze 10.3 und 12.2 erklären einige Phänomene der reellen Analysis, die im Reellen unverständlich erscheinen, z.B. erklären sie die Konvergenzradien der Taylorreihen rationaler Funktionen.

ABSCHNITT 13

Differentialgleichungen

Viele physikalische Gesetze besitzen die Form von Differentialgleichungen. Wir diskutieren dies an einem einfachen Beispiel, dem freien Fall mit Luftwiderstand. Ein Gegenstand der Masse m wird in der Höhe h über dem Erdboden

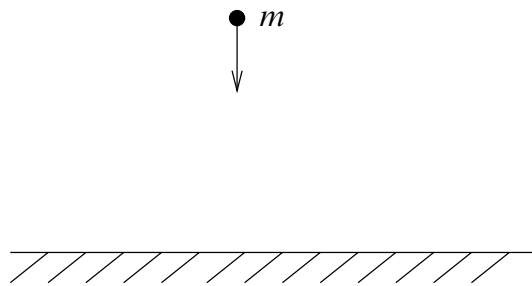


ABBILDUNG 1

losgelassen. Er fällt dann unter dem Einfluß der Schwerkraft und „gegen den Luftwiderstand“ zu Boden.

Wir setzen voraus, daß die Schwerkraft unabhängig von der Höhe ist und der Luftwiderstand der Geschwindigkeit proportional. Sei $y(t)$ der zur Zeit t zurückgelegte Weg. Dann wirkt auf den Körper zur Zeit t die Kraft

$$K(t) = mg - ry'(t)$$

ein. Dabei ist g die Erdbeschleunigung und r die Proportionalitätskonstante des Luftwiderstandes. Nach dem zweiten Newtonschen Gesetz erfährt der Körper die Beschleunigung

$$y''(t) = K(t) \cdot \frac{1}{m}.$$

Die Funktion y muß also die Gleichung

$$y''(t) = \frac{r}{m} \cdot y'(t) - g$$

erfüllen. Eine solche Gleichung, in der die „Unbekannte“ eine Funktion ist, heißt *Differentialgleichung*.

Genauer handelt es sich in diesem Fall um eine *explizite Differentialgleichung zweiter Ordnung*. „Explizit“ deshalb, weil die Gleichung sich nach der höchsten vorkommenden Ableitung auflösen läßt. Letztere gibt auch die Ordnung an.

Zur vollständigen Beschreibung des physikalischen Systems gehören aber auch die *Anfangsbedingungen*

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Erstere gibt einfach an, daß wir den zurückgelegten Weg vom Startpunkt aus messen, die zweite sagt, daß der Körper sich bei $t = 0$ in Ruhe befindet. Erst mit diesen Anfangsbedingungen ist das Problem auch mathematisch vollständig beschrieben.

Alle von uns betrachteten Differentialgleichungen werden explizit sein, und daher werden wir dieses Attribut im folgenden nicht mehr erwähnen. Ebenso werden alle unsere Differentialgleichungen *gewöhnlich* sein, d.h. es werden Ableitungen nur nach einer Variablen gebildet und die Lösungen sind Funktionen (oder Systeme von Funktionen) dieser Variablen. Im Gegensatz dazu stehen die *partiellen* Differentialgleichungen. Zum Beispiel sind die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen oder die Integrierbarkeitsbedingungen in Satz 8.6 partielle Differentialgleichungen.

Wir sagen nun präzise, was wir unter einer Differentialgleichung erster Ordnung verstehen:

Definition. Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ und $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Die Gleichung

$$y' = F(x, y)$$

heißt dann eine *Differentialgleichung erster Ordnung* auf U . Eine Lösung von F ist eine auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $(x, f(x)) \in U$ für alle $x \in I$, für die gilt:

$$f'(x) = F(x, f(x)) \quad \text{für alle } x \in I.$$

(Das Intervall I darf dabei offen, halboffen oder auch abgeschlossen sein.)

Im allereinfachsten Fall hängt F gar nicht von y ab und zur Bestimmung einer Lösung haben wir nur eine Stammfunktion von F zu finden. Insofern ordnet sich die Bestimmung von Stammfunktionen unter das Lösen von Differentialgleichungen ein.

Man kann die Funktion F in der Definition als ein *Richtungsfeld* deuten: $F(x, y)$ gibt die Steigung (oder Richtung) einer Lösung f mit $f(x) = y$ im Punkt x an. In sehr einfachen Fällen kann man die Lösungen direkt aus dem Richtungsfeld ablesen: In Abbildung 2 ist links das Richtungsfeld der Differentialgleichung $y' = y/x$, $x > 0$, illustriert, rechts das von $y' = -x/y$, $y > 0$. Als Lösungen erhalten wir

$$f(x) = c \cdot x, \quad c \in \mathbb{R} \quad \text{bzw.} \quad f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}, \quad -r < x < r.$$

Wir werden später sehen, daß wir damit alle Lösungen dieser Differentialgleichungen gefunden haben. Genauer heißt dies folgendes: Ist $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung

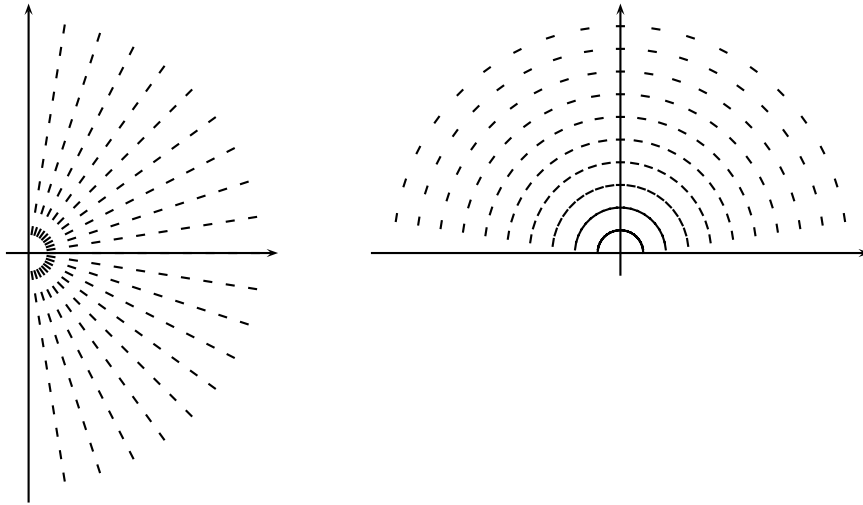


ABBILDUNG 2. Richtungsfelder von $y' = y/x$, $x > 0$, und $y' = -x/y$, $x > 0$

etwa der Differentialgleichung $y' = x/y$, $y > 0$, so existiert ein $r > 0$ mit $I \subset]-r, r[$ und

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \quad \text{für alle } x \in I.$$

Anders ausgedrückt: Wir haben genau die Lösungen f angegeben, deren Definitionsintervall jeweils maximal ist.

Nach dem Muster der obigen Definition sagen wir nun, was eine Differentialgleichung n -ter Ordnung ist:

Definition. Sei $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann nennt man

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

eine *Differentialgleichung n -ter Ordnung* (auf U). Eine Lösung dieser Gleichung ist eine auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definierte, n -mal differenzierbare Funktion f mit

$$(x, f(x), \dots, f^{(n-1)}(x)) \in U$$

für alle $x \in I$ und

$$f^{(n)}(x) = F(x, f(x), \dots, f^{(n-1)}(x))$$

für alle $x \in I$.

Unser anfangs betrachtetes Beispiel ist

$$y'' = -\frac{r}{m}y' + g.$$

Wenn wir $v = y'$ setzen, so erhalten wir zwei Gleichungen, nämlich

$$\begin{aligned}y' &= v, \\v' &= -\frac{r}{m}v + g.\end{aligned}$$

Wir haben die Gleichung zweiter Ordnung auf ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung reduziert:

Definition. Sei $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung. Die Gleichung

$$y' = F(x, y)$$

heißt dann ein *System von n Differentialgleichungen erster Ordnung*, und eine Lösung ist eine differenzierbare Abbildung $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist mit

$$(x, f_1(x), \dots, f_n(x)) \in U \quad \text{und} \quad (f'_1(x), \dots, f'_n(x)) = F(x, f_1(x), \dots, f_n(x))$$

für alle $x \in I$.

Die Definition eines Systems von Differentialgleichungen höherer Ordnung ersparen wir uns. Es ist aber klar, daß man jedes solche System auf eines erster Ordnung zurückführen kann. Daher kann man sich bei vielen Überlegungen auf Systeme erster Ordnung beschränken.

Wir haben oben schon erwähnt, daß man zur vollständigen Beschreibung eines Systems nicht nur die Differentialgleichungen kennen muß, sondern auch die Anfangsbedingungen. Für ein System von n Differentialgleichungen

$$y' = F(x, y)$$

erster Ordnung sind die *Anfangswerte*

$$y_1(x_0) = a_1, \dots, y_n(x_0) = a_n$$

für einen Wert x_0 der „freien“ Variablen x vorzugeben. Bei einer Differentialgleichung n -ter Ordnung

$$y^{(n)} = F(x, y, \dots, y^{(n-1)})$$

bilden

$$y(x_0) = a_0, \quad \dots \quad y^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1}$$

einen korrekten Satz von Anfangswerten. Ein *Anfangswertproblem* besteht aus Differentialgleichungen und Anfangswerten.

Differentialgleichungen in getrennten Variablen

Als einfaches Beispiel betrachten wir die Differentialgleichung

$$y' = xy$$

auf \mathbb{R}^2 . Der Ingenieur löst sie folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = x \cdot y &\implies \frac{dy}{y} = x dx \implies \int \frac{dy}{y} = \int x dx \implies \ln|y| = \frac{1}{2}x^2 + c \\ &\implies |y| = e^{(x^2/2+c)} \implies y = c'e^{x^2/2} \quad \text{mit } c' \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Das ist offensichtlich eine richtige Lösung. Der Trick besteht darin, die „Variablen“ x und y samt ihren „Differentials“ auf der linken bzw. rechten Seite der Gleichung zu sammeln. Wie wir gleich sehen werden, ist das obige saloppe Vorgehen präzisierbar.

Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ Intervalle, $F : I \rightarrow \mathbb{R}$, $G : J \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $G(y) \neq 0$ für alle $y \in J$. Dann nennt man die Differentialgleichung $y' = F(x)G(y)$ auf $I \times J$ eine *Differentialgleichung in getrennten Variablen*.

Satz 14.1. *Mit den soeben eingeführten Bezeichnungen sei $v \in J$ ein innerer Punkt von J . Dann existiert zu jedem $u \in I$ eine Umgebung U von u in I , für die das Anfangswertproblem*

$$y' = F(x)G(y), \quad y(u) = v,$$

eine eindeutig bestimmte Lösung f auf U hat. Sie ergibt sich durch Auflösen der Gleichung

$$\int_v^{f(x)} \frac{1}{G(t)} dt = \int_u^x F(t) dt$$

nach $f(x)$.

Beweis. Sei U eine zusammenhängende Umgebung von u in I und f eine Lösung, die auf U definiert ist. Da $f(t) \in J$, ist $G(f(t)) \neq 0$, somit

$$\frac{1}{G(f(t))} \cdot f'(t) = F(t)$$

für alle $t \in U$. Gemäß der Substitutionsregel der Integralrechnung ist dann

$$\int_u^x F(t) dt = \int_u^x \frac{1}{G(f(t))} f'(t) dt = \int_v^{f(x)} \frac{1}{G(t)} dt.$$

Die Lösung hat also die behauptete Form. Wir werden jetzt begründen, daß die vorangegangene Gleichung wirklich nach $f(x)$ auflösbar ist und daß sich hieraus auch eine Lösung der Differentialgleichung ergibt.

Zunächst ist aber U zu bestimmen. Sei

$$\varphi(y) = \int_v^y \frac{1}{G(t)} dt.$$

Dann ist φ differenzierbar, $\varphi' = 1/G$. Da φ' nirgends verschwindet, bildet φ das Intervall J streng monoton auf ein Intervall \tilde{J} um 0 ab. Sei nun

$$\chi(x) = \int_u^x F(t) dt.$$

Dann ist χ differenzierbar und $\chi' = F$. Es gibt also eine Umgebung U von u in I mit $\chi(u) \in \tilde{J}$. Nach Verkleinern von U dürfen wir annehmen, daß U ein Intervall ist.

Wir setzen nun

$$f(x) = \varphi^{-1}(\chi(x)) \quad \text{für } x \in U.$$

Dann hat f die im Satz beschriebene Form und ist durch sie eindeutig bestimmt.

Offensichtlich ist $f(u) = v$ und

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(\chi(x)))} \chi'(x) = \frac{1}{1/G(f(x))} F(x) = F(x)G(f(x)),$$

wie zu zeigen war. □

Der Präzision halber sollten wir noch darauf hinweisen, daß die Eindeutigkeitsaussage in 14.1 im wesentlichen unabhängig von U ist: Wenn f_1 und f_2 Lösungen des Anfangswertproblems auf zusammenhängenden Umgebungen U_1 und U_2 von x sind, so gilt

$$f_1(t) = f_2(t) \quad \text{für alle } t \in U_1 \cap U_2,$$

wie der erste Teil des Beweises zeigt. Daraus folgt, daß es unter allen Teilintervallen \tilde{I} von I , die u enthalten und auf denen eine Lösung des Anfangswertproblems existiert, ein maximales \tilde{I}_{\max} gibt und daß jede Lösung f auf einem Intervall \tilde{I} mit $u \in \tilde{I}$ sich durch Beschränkung der „maximalen“ Lösung ergibt.

Beispiel 14.2. Wir betrachten

$$y' = x \cdot e^{-y}$$

mit $I = J = \mathbb{R}$. Satz 14.1 sichert die Existenz einer Lösung zu jeder Anfangsbedingung $y(u) = v$. Es gilt

$$\begin{aligned} \int_v^{f(x)} e^t dt &= \int_u^x t dt, \\ e^{f(x)} - e^v &= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}u^2, \\ e^{f(x)} &= \frac{1}{2}x^2 + C \quad \text{mit} \quad C = e^v - \frac{1}{2}u^2, \\ f(x; C) &= \log\left(\frac{1}{2}x^2 + C\right). \end{aligned}$$

Für $C > 0$ ist die Lösung überall, für $C \leq 0$ nur außerhalb des abgeschlossenen Intervalls $[-\sqrt{-2C}, \sqrt{-2C}]$ definiert.

An Beispiel 14.2 kann man vor allem lernen, daß nicht jede Lösung auf ganz \mathbb{R} definiert oder dorthin fortsetzbar zu sein braucht, obwohl die in der Differentialgleichung vorkommenden Funktionen überall definiert sind und die bestmöglichen Eigenschaften haben.

Spezialfall der Differentialgleichung in getrennten Variablen ist die *homogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung*

$$y' = a(x)y,$$

wobei a eine auf einem Intervall I stetige Funktion ist.

Satz 14.3. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $u \in I$ und $v \in \mathbb{R}$. Dann besitzt das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y' &= a(x)y, \\ y(u) &= v, \end{aligned}$$

genau eine Lösung $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, nämlich

$$f(x) = v \cdot \exp\left(\int_u^x a(t) dt\right).$$

Beweis. Im Fall $v \neq 0$ folgt die Behauptung aus Satz 14.1 (wenn man beachtet, daß die dort auftretende Umgebung U von x_0 gleich I gewählt werden kann).

Sei $v = 0$. Dann ist natürlich die Nullfunktion eine Lösung. Eine davon verschiedene Lösung f hätte für ein $u_1 \in I$ den Wert $v_1 = f(u_1) \neq 0$. Die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = a(x)y, \quad y(u_1) = v_1$$

hat aber nirgends eine Nullstelle, wie oben bereits gesehen. □

Wir können für 14.3 auch so argumentieren: Die angegebene Funktion f löst offensichtlich das Anfangswertproblem, so daß nur noch die Eindeutigkeit zu beweisen ist. Sei dazu

$$h(x) = \exp\left(\int_u^x a(t)dt\right).$$

Dann gilt auch $h' = ah$, und h hat keine Nullstelle auf I . Für jede Lösung f von $f' = af$ ist dann

$$\left(\frac{f}{h}\right)' = \frac{fah - fah}{h^2} = 0,$$

so daß f/h konstant (und damit $= v$ ist).

Die inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung

$$y' = a(x)y + b(x)$$

ist keine Differentialgleichung in getrennten Variablen. Aber auch sie läßt sich elementar lösen. Man verwendet dazu ein Verfahren, das den (etwas widersinnigen) Namen *Variation der Konstanten* trägt. Sei

$$h(x) = \exp\left(\int_u^x a(t)dt\right)$$

wie oben. Da h keine Nullstelle hat, läßt sich jede Lösung der inhomogenen Gleichung durch h teilen. Wir machen den Ansatz

$$f(x) = c(x)h(x).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= c(x)h'(x) + c'(x)h(x) = c(x)a(x)h(x) + c'(x)h(x) \\ &= a(x)f(x) + c'(x)h(x). \end{aligned}$$

Also muß man

$$c(x) = \int_u^x \frac{b(t)}{h(t)} dt + c'$$

wählen, wobei dann $f(u) = c'$ ist:

Satz 14.4. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen, $u \in I$, $v \in \mathbb{R}$. Dann hat das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y' &= a(x)y + b(x), \\ y(u) &= v, \end{aligned}$$

die eindeutig bestimmte Lösung $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = h(x) \left(v + \int_u^x \frac{b(t)}{h(t)} dt \right),$$

wobei $h(x) = \exp\left(\int_u^x a(t)dt\right)$.

Dazu ist nichts mehr zu beweisen.

An einem einfachen Beispiel wollen wir noch den Kunstgriff der *Substitution* erläutern. Wir betrachten eine Differentialgleichung

$$y' = F(ax + by + c), \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Wir setzen $z = ax + by + c$. Dann ist $z' = a + by'$. Also muß z die Differentialgleichung

$$z' = a + bF(z)$$

lösen, und umgekehrt gewinnt man aus einer ihrer Lösungen eine Lösung von $y' = F(ax + by + c)$. Die Gleichung für z ist eine Differentialgleichung in getrennten Variablen, denn x kommt explizit gar nicht vor.

Beispiel 14.5. $y' = (x + y)^2$. Mit $z = x + y$ hat man

$$z' = z^2 + 1, \quad \int_v^{g(x)} \frac{1}{1+t^2} dt = \int_u^x dt,$$

$$\arctan g(x) - \arctan v = x - u, \quad g(x) = \tan(x + C).$$

Also ist $f(x) = \tan(x + C) - x$ eine Lösung von $y' = (x + y)^2$.

Der Satz von Picard-Lindelöf

Wir haben bei den Beispielen des Kapitels 14 festgestellt, daß die dort betrachteten Anfangswertprobleme stets eindeutige Lösungen besitzen. In diesem Abschnitt soll ein sehr allgemeiner Satz über die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen von Anfangswertproblemen bewiesen werden. Allerdings ist ohne jegliche Voraussetzungen die Eindeutigkeit der Lösungen nicht gesichert, wie folgendes Beispiel zeigt:

Beispiel 15.1. Sei $U = \mathbb{R}^2$, $y' = 3(\sqrt[3]{y})^2$. Dann sind sowohl $f_1(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, und $f_2(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$, Lösungen zum Anfangswert $y(0) = 0$.

Die nächste Definition nennt eine Eigenschaft der „rechten Seite“, die die Eindeutigkeit der Lösungen sichern wird.

Definition. Seien M, N metrische Räume. Eine Abbildung $f : M \rightarrow N$ erfüllt eine *Lipschitz-Bedingung*, wenn es ein $L \in \mathbb{R}$ mit

$$d(f(x), f(y)) \leq L \cdot d(x, y)$$

für alle $x, y \in M$ gibt.

Eine Abbildung $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ erfüllt eine *Lipschitz-Bedingung bezüglich y* , falls

$$\|F(x, y) - F(x, y')\| \leq L \|y - y'\|$$

für alle $(x, y), (x, y') \in U$ und ein geeignetes $L \in \mathbb{R}$ gilt.

Man sagt, F erfüllt eine *lokale Lipschitz-Bedingung bezüglich y* , falls es zu jedem $(x, y) \in U$ eine Umgebung V gibt, so daß $F|_{U \cap V}$ eine Lipschitz-Bedingung bezüglich y erfüllt.

Die Funktion $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = 3(\sqrt[3]{y})^2$, erfüllt in keiner Umgebung von $(x, 0)$, $x \in \mathbb{R}$, eine Lipschitz-Bedingung. Viele wichtige Abbildungen erfüllen aber eine lokale Lipschitz-Bedingung:

Satz 15.2. Sei $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Abbildung, deren Komponenten bezüglich der Variablen y_1, \dots, y_n stetig partiell differenzierbar sind. Dann erfüllt F auf U eine lokale Lipschitz-Bedingung bezüglich y .

Beweis. Sei $(u, v) \in U$, $u \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}^n$. Dann gibt es eine ε -Umgebung $V \subset U$ von (u, v) , so daß

$$\left| \frac{\partial F_i}{\partial y_i}(x, y) \right| < M$$

für alle $(x, y) \in V$ und eine geeignete Konstante $M \in \mathbb{R}$. Wir betrachten (x, y) , $(x, y') \in V$. Die Menge

$$W = \{z \in \mathbb{R}^n : (x, z) \in V\}$$

ist offen. Wir setzen

$$G(z) = F(x, z), \quad z \in W.$$

Die Beschränkung der $(\partial F_i / \partial y_j)(x, y)$ impliziert, daß

$$\|JG(z)\| \leq L, \quad z \in W,$$

für eine geeignete Konstante $L \in \mathbb{R}$, so daß die Behauptung aus dem Schranken-satz folgt. \square

Wir können nun den wesentlichen Teil des *Existenz- und Eindeutigkeitssatzes von Picard-Lindelöf* formulieren:

Satz 15.3. Sei $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen. Die stetige Abbildung $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ erfülle eine lokale Lipschitz-Bedingung bezüglich y . Dann gibt es zu jedem $(u, v) \in U$ ein $\delta > 0$ und ein $\varepsilon > 0$, so daß das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y' &= F(x, y), \\ y(u) &= v \end{aligned}$$

genau eine Lösung

$$f : [u - \xi, u + \xi] \rightarrow \overline{U}_\varepsilon(v)$$

hat für jedes $\xi \leq \delta$.

Beweis. Zunächst wählen wir $\gamma, \varepsilon > 0$ so, daß F auf

$$R = [u - \gamma, u + \gamma] \times \overline{U}_\varepsilon(v)$$

die Lipschitz-Bedingung bezüglich y mit der Konstanten L erfüllt. Auf der kompakten Menge R ist F beschränkt, etwa

$$\|F(x, y)\| \leq M$$

für alle $(x, y) \in R$. Wir wählen nun δ , $0 < \delta \leq \gamma$, so daß

- (a) $\delta \leq \varepsilon/M$,
- (b) $\delta < 1/L$.

Sei $J = [u - \delta, u + \delta]$. Für eine stetige Abbildung $\varphi : J \rightarrow \overline{U}_\varepsilon(v)$ definieren wir eine Abbildung $\Phi(\varphi) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ mittels

$$(\Phi(\varphi))(x) = v + \int_u^x F(t, \varphi(t)) dt.$$

Dann ist $\Phi(\varphi)$ stetig differenzierbar mit $(\Phi(\varphi))'(x) = F(x, \varphi(x))$. Wenn φ ein Fixpunkt von Φ ist, so ist

$$\varphi(x) = v + \int_u^x F(t, \varphi(t)) dt$$

für alle $x \in J$ und damit $\varphi'(x) = F(x, \varphi(x))$. Außerdem gilt $\varphi(u) = v$. Also ist φ Lösung des Anfangswertproblems.

Ist umgekehrt $f : I \rightarrow \overline{U}_\varepsilon(v)$ eine Lösung des Anfangswertproblems, so folgt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, daß f Fixpunkt von Φ ist.

Die Menge

$$B = \{\varphi : J \rightarrow \overline{U}_\varepsilon(v) : \varphi \text{ stetig}\}$$

ist abgeschlossen im Banachraum der stetigen Abbildungen von J nach \mathbb{R}^n und nicht leer, weil die Konstante v zu B gehört. Nach dem Banachschen Fixpunktsatz reicht es nun aus zu zeigen, daß Φ kontrahierend ist auf B und B in sich abbildet.

Sei also $\varphi \in B$. Dann ist für alle $x \in I$

$$\begin{aligned} \|(\Phi(\varphi))(x) - v\| &= \left\| \int_u^x F(t, \varphi(t)) dt \right\| \leq \int_u^x \|F(t, \varphi(t))\| dt \\ &\leq |x - u| \cdot M \leq \delta \cdot M \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Ferner gilt für $\varphi, \psi \in B$:

$$\begin{aligned} \|(\Phi(\varphi))(x) - (\Phi(\psi))(x)\| &= \left\| \int_u^x (F(t, \varphi(t)) - F(t, \psi(t))) dt \right\| \\ &\leq \int_u^x \|F(t, \varphi(t)) - F(t, \psi(t))\| dt \\ &\leq \int_u^x \|L \cdot (\varphi(t) - \psi(t))\| dt \\ &\leq \delta \cdot L \|\varphi - \psi\|_\infty \end{aligned}$$

und $\delta \cdot L < 1$ gemäß der Wahl von δ .

Damit ist die Behauptung für $\xi = \delta$ bewiesen. Alle Argumente bleiben aber richtig, wenn wir δ verkleinern. \square

Gemäß dem Beweis des Banachschen Fixpunktsatzes können wir die Lösung des Anfangswertproblems mit der *Picard-Lindelöf-Iteration*

$$\begin{aligned}\varphi_0(x) &= v, \\ \varphi_{n+1}(x) &= \int_u^x F(t, \varphi_n(t)) dt, \quad n \geq 0,\end{aligned}$$

finden, zumindest auf dem Intervall $[u - \delta, u + \delta]$. In der Regel gibt es aber bessere Verfahren.

Wir „globalisieren“ nun den Existenz- und Eindeigkeitssatz so weit wie möglich.

Satz 15.4. *Unter den Voraussetzungen von 15.3 existieren ein offenes Intervall I_{\max} mit $u \in I_{\max}$ und eine (notwendig eindeutig bestimmte) Lösung $f_{\max} : I_{\max} \rightarrow \mathbb{R}^n$ des Anfangswertproblems mit folgender Eigenschaft: Ist I ein Intervall mit $u \in I$, auf dem das Anfangswertproblem eine Lösung hat, so ist $I \subset I_{\max}$ und $f = f_{\max} | I$.*

Beweis. Seien I_1, I_2 Intervalle mit $u \in I_1, u \in I_2$ und f_1, f_2 Lösungen des Anfangswertproblems. Wir behaupten:

- (a) $f_1(x) = f_2(x)$ für alle $x \in I_1 \cap I_2$;
- (b) die Funktion $f : I_1 \cup I_2 \rightarrow \mathbb{R}^n, f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{für } x \in I_1, \\ f_2(x) & \text{für } x \in I_2, \end{cases}$

ist Lösung des Anfangswertproblems auf $I_1 \cup I_2$.

Offensichtlich ist (a) richtig, wenn

$$I_1 \cap I_2 = \{u\}$$

mit $a, b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ gilt. In allen anderen Fällen ist das Innere von $I_1 \cap I_2$ nicht leer, und die Behauptung folgt wegen der Stetigkeit, wenn sie für alle inneren Punkte von $I_1 \cap I_2$ gilt.

Sei also nun $x \in I_1 \cap I_2$ innerer Punkt. Wir dürfen annehmen, daß $x \geq u$ gilt; im anderen Fall argumentiert man analog. Sei

$$J = \{z : u \leq z \leq x \text{ und } f_1(w) = f_2(w) \text{ für alle } w \in [x, z]\}.$$

Dann ist J ein Intervall mit $u \in J$. Wegen der lokalen Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems enthält J ein Intervall $[u, u']$ mit $u' > u$. Also ist $s = \sup J > u$. Wir nehmen an, daß $s = \sup J < x$. Weil f_1 und f_2 stetig sind, gehört w zu J , also $f_1(w) = f_2(w)$. Wir betrachten nun das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned}y' &= F(x, y), \\ y(w) &= f_1(w) \quad (= f_2(w)).\end{aligned}$$

Es hat gemäß 15.3 eine eindeutig bestimmte Lösung

$$g : [w - \delta, w + \delta] \rightarrow \overline{U}_\varepsilon(f_1(w))$$

für ein $\delta > 0$. Die Eindeutigkeit der Lösung bleibt aber auch bestehen, wenn wir δ durch $\xi = \min(\delta, w - u, x - w)$ ersetzen. Es folgt

$$f_1(x) = f_2(x) = g(x)$$

für alle z mit $x \leq z \leq w + \xi$. Dies ist ein Widerspruch, denn $w + \xi \notin J$ gemäß Definition von J . Damit ist (a) bewiesen und die Funktion g in (b) wohldefiniert.

Behauptung (b) hingegen ist nur kritisch, wenn $I_1 \cap I_2 = \{u\}$, die Intervalle sich also nur in einem Punkt überlagern. Aber jede Komponente von f ist links- wie rechtsseitig differenzierbar und die Ableitungen im Punkt u sind links wie rechts durch die Werte $F_i(u, v)$ gegeben, so daß f auf $I_1 \cup I_2$ differenzierbar ist.

Wir setzen nun

$$I_{\max} = \bigcup \{I \text{ Intervall, } u \in I, \text{ und es existiert eine Lösung } f_I : I \rightarrow \mathbb{R}\}$$

des Anfangswertproblems. Dann ist auch I_{\max} ein Intervall und wir können

$$f_{\max}(x) = f_I(x) \quad \text{für } x \in I$$

setzen. Dies ist wegen (a) möglich und (b) impliziert, daß f_{\max} auf ganz I differenzierbar ist.

Es folgt, daß sich jede Lösung des Anfangswertproblems durch Einschränkung von f_{\max} ergibt. Einzig zu zeigen ist die Offenheit von I_{\max} . Wir nehmen an, I_{\max} habe einen linken Randpunkt $w \in I_{\max}$. Dann können wir durch Betrachten der Anfangsbedingung $y'(w) = f_{\max}(w)$ die Lösung f_{\max} mit 15.3 weiter nach links fortsetzen. Widerspruch. Für den rechten Rand argumentiert man ebenso. \square

Bemerkung 15.5. Die Lösung f_{\max} „verläßt U nach links und rechts“ in folgendem Sinn: Sei (x_k) eine Folge in I_{\max} , die gegen $\inf I_{\max}$ konvergiert (gegen $-\infty$, wenn I_{\max} nach unten unbeschränkt ist); dann hat die Folge $(x_k, f_{\max}(x_k))$ keinen Häufungspunkt in U . Analoges gilt für $(x_k) \rightarrow \sup I_{\max}$. Wir überlassen dies einer Übungsaufgabe.

Es ist noch einmal zu betonen, daß Satz 15.4 etwa im Fall

$$U = I \times \tilde{U}$$

nicht impliziert, daß $I = I_{\max}$ gilt. Die Größe des Intervalls I_{\max} ist im allgemeinen nicht a priori abzuschätzen. In gewissen Fällen kann man aber dennoch eine Aussage über die Existenz globaler Lösungen machen.

Satz 15.6. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Die Funktion $F : I \times \mathbb{R}^n$ erfülle eine globale Lipschitz-Bedingung in y auf $J \times \mathbb{R}^n$ für jedes kompakte Intervall $J \subset I$. Dann

existiert zu jedem $u \in I$ und jedem $v \in \mathbb{R}^n$ genau eine Lösung $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ des Anfangswertproblems

$$y' = F(x, y), \quad y(u) = v.$$

Beweis. Falls I „nach unten abgeschlossen“ ist mit linkem Randpunkt w , vergrößern wir I bis $-\infty$, indem wir $F(x, y) = F(w, y)$ setzen für alle $x \leq w$. Dann bleibt die Lipschitz-Bedingung erhalten. Analog verfahren wir, falls I „nach rechts abgeschlossen“ ist. Wir dürfen also annehmen, daß I offen ist.

Da I Vereinigung der Intervalle $[a, b] \subset I$ mit $u \in I$ ist, genügt es wegen 15.4, die Existenz einer Lösung des Anfangswertproblems auf solchen Intervallen zu beweisen.

Sei $\delta = \max\{u-a, b-u\}$. Wir machen wieder den Ansatz der Picard-Lindelöf-Iteration

$$(\Phi(\varphi))(x) = v + \int_u^x F(t, \varphi(t)) dt$$

und wählen

$$B = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n : f \text{ stetig}\}.$$

Wie im Beweis von 15.3 erhalten wir die Abschätzung

$$\|\Phi(\varphi) - \Phi(\psi)\|_\infty \leq \delta L \|\varphi - \psi\|_\infty.$$

Daher können wir nur im Fall $\delta L < 1$ sicher sein, daß Φ kontrahierend ist.

Wenn nicht, zerschneiden wir einfach das Intervall $[a, b]$ in N abgeschlossene Teilintervalle, wobei jedes Teilintervall eine Länge $< 1/L$ bekommt und stückeln die Lösung zusammen, von u ausgehend und nach links und rechts fortschreitend. Satz 15.4 sichert, daß alles zusammenpaßt. \square

Die Sätze dieses Abschnitts kann man auf Differentialgleichungen höherer Ordnung (oder Systeme solcher Differentialgleichungen) übertragen, indem man zu einem äquivalenten System von Differentialgleichungen erster Ordnung übergeht. Wenn

$$F : U \rightarrow \mathbb{R}, \quad U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n,$$

lokal oder global eine Lipschitz-Bedingung bezüglich (y_1, \dots, y_n) erfüllt, so gilt dies auch für

$$G : U \rightarrow \mathbb{R}^n, \\ G(x, y_1, \dots, y_n) = (y_2, \dots, y_{n-1}, F(x, y_1, \dots, y_n)).$$

Wir verzichten darauf, Analogie zu 15.3, 15.4 und 15.6 zu formulieren. Es ist klar, daß für eine Differentialgleichung n -ter Ordnung

$$y^{(n)} = F(x, y, \dots, y^{(n-1)})$$

die Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned}y(u) &= v_0 \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(u) &= v_{n-1}\end{aligned}$$

zu stellen sind, denn diese werden bei der Umsetzung in ein äquivalentes System erster Ordnung die „richtigen“ Anfangsbedingungen.

Lineare Differentialgleichungen

Es ist im folgenden zweckmäßig, auch komplexwertige Lösungen von Differentialgleichungen einzubeziehen. Die freie Variable x ist dabei aber immer reellwertig, so daß wir keine komplexen Differentialgleichungen im eigentlichen Sinn betrachten.

Bei der Betrachtung linearer Differentialgleichungen gehen wir sogar noch einen kleinen Schritt weiter:

Definition. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, \mathbb{K} einer der Körper \mathbb{R} oder \mathbb{C} und

$$A : I \rightarrow M(n \times n, \mathbb{K}), \quad b : I \rightarrow \mathbb{K}^n$$

stetige Abbildungen. (Dabei sei $M(n \times n, \mathbb{K})$ der Banachraum der $n \times n$ -Matrizen über \mathbb{K} .) Dann nennt man

$$y' = A(x) \cdot y + b(x)$$

ein *System linearer Differentialgleichungen erster Ordnung* auf I . Wir werden kurz von einem linearen System erster Ordnung sprechen.

Daß die Abbildung $A : I \rightarrow M(n \times n, \mathbb{K})$ stetig ist, heißt natürlich nur, daß $A(x)$ für $x \in I$ die Form $(a_{ij}(x))$ hat, wobei jedes a_{ij} eine stetige Funktion auf I ist.

Beispiel 16.1. Mit $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ betrachten wir das System

$$\begin{aligned} y_1' &= \omega y_2 + x, \\ y_2' &= -\omega y_1. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$y' = A(x) \cdot y + b(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

In diesem einfachen Beispiel ist die Matrix $A(x)$ konstant.

Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ erhält man durch Aufspalten aller Daten in Real- und Imaginärteil aus dem oben beschriebenen System von n komplexwertigen Gleichungen ein äquivalentes System von $2n$ reellwertigen Gleichungen. Wir weisen noch einmal darauf hin, daß nur die reelle Differenzierbarkeit ins Spiel kommt.

Satz 16.2. *Mit den Bezeichnungen und Voraussetzungen der Definition gilt: Für jedes $u \in I$ und $v \in \mathbb{R}^n$ hat das Anfangswertproblem*

$$\begin{aligned}y' &= A(x)y + b(x), \\y(u) &= v\end{aligned}$$

eine eindeutige Lösung $f : I \rightarrow \mathbb{K}^n$.

Beweis. Es genügt, die Gültigkeit einer globalen Lipschitzbedingung auf $I \times \mathbb{K}^n$ für jedes kompakte Teilintervall $J \subset I$ nachzuweisen, denn dann können wir Satz 15.6 anwenden. Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ betrachte man $A(x)$ im folgenden einfach als reelle $2n \times 2n$ -Matrix.

Die Koeffizientenfunktionen $a_{ij}(x)$ von $A(x)$ sind beschränkt auf J . Folglich ist auch $\|A(x)\|$ beschränkt auf J , etwa $\|A(x)\| \leq L$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\|(A(x)y_1 + b(x)) - (A(x)y_2 + b(x))\| &= \|(A(x)(y_1 - y_2))\| \leq \|A(x)\| \|y_1 - y_2\| \\ &\leq L \|y_1 - y_2\|\end{aligned}$$

für alle $x \in J$, $y_1, y_2 \in \mathbb{K}^n$. □

Wie wir im folgenden feststellen werden, gibt es gewisse Parallelitäten zwischen gewöhnlichen linearen Gleichungssystemen und Systemen linearer Differentialgleichungen. Auch bei letzteren betrachten wir zunächst den homogenen Fall:

Satz 16.3. *Mit den Bezeichnungen und Voraussetzungen der Definition gilt:*

(a) *Die Menge \mathbb{L} der Lösungen des homogenen Systems*

$$y' = A(x)y$$

auf I bilden einen n -dimensionalen Untervektorraum des Vektorraums aller differenzierbaren Abbildungen $f : I \rightarrow \mathbb{K}^n$.

(b) *Für jedes $u \in I$ ist die Abbildung $\Lambda_u : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{K}^n$, $\Lambda_u(f) = f(u)$, ein Isomorphismus von \mathbb{K} -Vektorräumen.*

(c) *Für Lösungen $f_1, \dots, f_n : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *f_1, \dots, f_n sind linear unabhängig;*

(ii) *es existiert ein $u \in I$, für das $f_1(u), \dots, f_n(u)$ linear unabhängig sind;*

(iii) *für jedes $x \in I$ sind $f_1(x), \dots, f_n(x)$ linear unabhängig.*

Beweis. Sei V der \mathbb{K} -Vektorraum der differenzierbaren Abbildungen $f : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ und W der \mathbb{K} -Vektorraum aller Abbildungen von I nach \mathbb{K}^n . Wir definieren nun eine Abbildung $D(f) \in W$ für $f \in V$ mittels

$$(D(f))(x) = A(x) \cdot f(x) - f'(x) \quad x \in I.$$

Dann ist $D : V \rightarrow W$ eine \mathbb{K} -lineare Abbildung. (Auch im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist dies unmittelbar nachzurechnen.) Die Lösungsmenge des Differentialgleichungssystems ist der Kern von D und somit ein Untervektorraum. Nach (b) hat er die Dimension n .

(b) Daß die Abbildung Λ_u eine lineare Abbildung ist, folgt unmittelbar aus der Definition der Addition und Skalarmultiplikation auf V : diese sind gerade so definiert, daß Λ_u linear ist.

Die lineare Abbildung Λ_u ist injektiv, weil nur die Nullabbildung den Anfangswert 0 in u hat. Das folgt aus der Eindeutigkeitsaussage in Satz 16.2. Sie ist aber auch surjektiv nach der Existenzaussage: Zu jedem $v \in \mathbb{K}^n$ existiert ein $f \in \mathbb{L}$ mit $v = f(u)\Lambda_u(f)$.

(c) Die Äquivalenz von (i) und (iii) folgt aus (b): f_1, \dots, f_n sind linear unabhängig genau dann, wenn $\Lambda_u(f_1), \dots, \Lambda_u(f_n)$ linear unabhängig sind.

Da offensichtlich (iii) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (i) gilt, ist alles bewiesen. \square

Definition. Eine Basis f_1, \dots, f_n des Lösungsraums \mathbb{L} von $y' = A(x)y$ wird auch (*Lösungs-*) *Fundamentalsystem* genannt.

Jedes f_i ist ja eine Abbildung von I nach \mathbb{K}^n , besteht also aus n Komponenten. Wir betrachten f_i als *Spalte* und bilden die Matrix

$$F = \begin{pmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n1} & \cdots & f_{nn} \end{pmatrix}.$$

Dann ist für jedes $u \in I$ die Matrix $f(u)$ die Matrix der linearen Abbildung Λ_u bezüglich der Basis f_1, \dots, f_n von \mathbb{L} und der kanonischen Basis von \mathbb{K}^n .

Aus 15.2 folgt, daß für jedes $u \in I$

$$\det F(u) \neq 0$$

ist. Ist die Anfangsbedingung $y(u) = v$ gegeben, so haben wir zur Bestimmung der Koeffizienten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ in der Darstellung $f = \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n$ der Lösung des Anfangswertproblems das lineare Gleichungssystem

$$v = F(u) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

zu lösen. Um wenigstens diesen Schritt einfach zu machen, wird man oft $F(u)$ als Einheitsmatrix wählen, also das Fundamentalsystem so bestimmen, daß die zugehörigen Anfangswerte gerade die Einheitsvektoren bilden.

Beispiel 16.4. Wir nehmen das Beispiel 16.1 wieder auf. Das zugehörige homogene System ist

$$\begin{aligned}y_1' &= \omega y_2 \\ y_2' &= -\omega y_1,\end{aligned}$$

also

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Dabei sei $\omega \in \mathbb{C}$ konstant und $I = \mathbb{R}$. Durch Nachprüfen sieht man, daß

$$f_1(x) = \begin{pmatrix} \sin(\omega x) \\ \cos(\omega x) \end{pmatrix}, \quad f_2(x) = \begin{pmatrix} -\cos(\omega x) \\ \sin(\omega x) \end{pmatrix}$$

zwei Lösungen des Systems bilden. Es ist

$$f_1(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f_2(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Vektoren $f_1(0)$ und $f_2(0)$ sind linear unabhängig. Also bilden f_1 und f_2 ein Lösungs-Fundamentalsystem. Um eine Lösung f mit $f(0) = v$ zu erhalten, haben wir die Linearkombination $f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ mit

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = F(0)^{-1}v = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 \\ -v_1 \end{pmatrix}$$

zu wählen.

Später werden wir zeigen, wie man homogene Systeme mit konstanten Koeffizienten explizit löst.

Wir betrachten nun die inhomogene Gleichung

$$y' = A(x)y + b(x).$$

Wie bei gewöhnlichen linearen Gleichungssystemen (und aus dem gleichen Grund) kann man jede ihrer Lösungen in der Form

$$f = \tilde{f} + g$$

schreiben, wobei \tilde{f} eine „spezielle“ Lösung des inhomogenen Systems ist und g eine Lösung des zugehörigen homogenen Systems $y' = A(x)y$. Umgekehrt ist jede Summe $\tilde{f} + g$ mit $g' = A(x)g$ Lösung des inhomogenen Systems.

Wie im Fall einer einzigen Gleichung kann man auch für lineare Systeme die inhomogene Gleichung lösen, wenn man ein Fundamentalsystem für die homogene Gleichung kennt, und wieder verwendet man die *Variation der Konstanten*.

Satz 16.5. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und seien $A : I \rightarrow M(n \times n, \mathbb{K})$ und $b : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ stetige Abbildungen. Ferner seien die Spalten der Matrix

$$F = \begin{pmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n1} & \cdots & f_{nn} \end{pmatrix}$$

ein Fundamentalsystem für die homogene Gleichung $y' = A(x)y$. Dann hat das Anfangswertproblem

$$y' = A(x)y \quad y(u) = v$$

für jedes $u \in I$ und $v \in \mathbb{R}^n$ die (eindeutig bestimmte) Lösung

$$g(x) = F(x)\varphi(x)$$

wobei

$$\varphi(x) = F(u)^{-1} \cdot v + \int_u^x F(t)^{-1} b(t) dt.$$

Man beweist dies durch Einsetzen. Daß die Matrix $F(x)$ für alle $t \in I$ invertierbar ist, haben wir oben gesehen.

Beispiel 16.6. Mit $\omega = 1$ nehmen wir das Beispiel 16.4 wieder auf und betrachten

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 + x, \\ y_2' &= -y_1, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, \\ f(t) &= \begin{pmatrix} \sin t & -\cos t \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dann ist

$$f(t)^{-1} = \begin{pmatrix} \sin t & \cos t \\ -\cos t & \sin t \end{pmatrix}.$$

Für $u = 0$ und $v = 0$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \int_0^x \begin{pmatrix} \sin t & \cos t \\ -\cos t & \sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^x \begin{pmatrix} t \sin t \\ -t \cos t \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} -x \cos x + \sin x \\ -x \sin x - \cos x + 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Es folgt

$$f(x) = \begin{pmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x \cos x + \sin x \\ -x \sin x - \cos x + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \cos x \\ -x + \sin x \end{pmatrix}.$$

Wir spezialisieren die bisherigen Aussagen noch auf den Fall einer linearen Differentialgleichung höherer Ordnung:

Satz 16.7. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Die Funktionen a_0, \dots, a_{n-1} von I in \mathbb{K} seien stetig, ebenso die Funktion $b : I \rightarrow \mathbb{K}$. Dann gilt:

(a) Das Anfangswertproblem

$$y^{(n)} = a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_0(x)y + b(x),$$

$$y^{(j)}(u) = v_j, \quad j = 0, \dots, n-1,$$

hat für alle $u \in I$ und $v_j \in \mathbb{K}$, $j = 0, \dots, n-1$, eine eindeutig bestimmte Lösung.

(b) Die Lösungen der homogenen Gleichung

$$y^{(n)} = a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_0(x)y$$

bilden einen n -dimensionalen Vektorraum.

(c) Die Lösungen f_1, \dots, f_n dieser Gleichung sind genau dann linear unabhängig, wenn für ein (und damit für alle) $u \in I$ die Wronski-Determinante

$$W(u) = \det \begin{pmatrix} f_1(u) & \dots & f_n(u) \\ f_1'(u) & \dots & f_n'(u) \\ \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(u) & \dots & f_n^{(n-1)}(u) \end{pmatrix}$$

nicht verschwindet.

Dies ergibt sich unmittelbar durch Übergang zu dem äquivalenten System

$$y_1' = y_2,$$

$$\vdots$$

$$y_{n-1}' = y_n,$$

$$y_n' = a_{n-1}(x)y_n + \dots + a_0(x)y_1 + b(x)$$

(mit der Entsprechung $y_i \leftrightarrow y^{(i-1)}$). Bei der Variation der Konstanten geht man am besten ebenfalls zum äquivalenten System erster Ordnung über.

Zum Abschluß dieses Abschnitts betrachten wir am Beispiel der *Legendreschen Differentialgleichung*

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2}y' + \frac{n(n+1)}{1-x^2}y = 0$$

die Lösung von Differentialgleichungen durch Potenzreihenansatz. Das zugrundegelegte Intervall ist $I =]-1, 1[$; die Zahl n ist zunächst nur als reell vorausgesetzt. Es ist zweckmäßig, die Gleichung in der äquivalenten Form

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

zu schreiben. Da die „Koeffizienten-Funktionen“

$$\frac{2x}{1-x^2} \quad \text{und} \quad \frac{n(n+1)}{1-x^2}$$

sich um 0 in auf ganz I konvergente Potenzreihen entwickeln lassen, können wir hoffen, daß dies auch für die Lösungen der Differentialgleichung gilt. Dies ist richtig, wir verzichten aber darauf, es (allgemein) zu beweisen. Der Versuch, die Gleichung durch Potenzreihenansatz zu lösen, ist zumindest nicht verboten.

Sei also $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Eine konvergente Potenzreihe kann gliedweise differenziert werden. Folglich gilt

$$\begin{aligned} (1-x^2)y''(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (1-x^2)k \cdot (k-1)a_k x^{k-2} \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} (1-x^2)k(k-1)a_k x^{k-2} \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} - \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^k \\ -2xy' &= -\sum_{k=1}^{\infty} 2ka_k x^k. \end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} + \sum_{k=0}^{\infty} [-k(k-1) - 2k + n(n+1)]a_k x^k = 0.$$

Um die Koeffizienten zu gleichen Potenzen von x zusammenfassen zu können, verschieben wir den Summationsindex in der ersten Summe und erhalten

$$\sum_{k=0}^{\infty} [(k+2)(k+1)a_{k+2} + (n^2 + n - k^2 - k)]a_k x^k = 0.$$

Diese Gleichung gilt genau dann, wenn

$$(k+2)(k+1)a_{k+2} + (n^2 + n - k^2 - k)a_k = 0$$

für alle k . Dies führt auf die Rekursionsformel

$$a_{k+2} = \frac{(n-k)(n+k+1)}{(k+2)(k+1)} a_k \quad \text{für } k \geq 0.$$

Natürlich können $a_0 = y(0)$ und $a_1 = y'(0)$ frei gewählt werden. Sie geben gerade die Anfangswerte an.

Man kann in der Differentialgleichung n durch $-n-1$ ersetzen, ohne sie zu verändern. Deshalb nehmen wir im folgenden an, daß $n \geq 1/2$.

Sei zunächst $n \notin \mathbb{N}$. Wenn $a_0 = 1, a_1 = 0$ ist, folgt $a_k = 0$ für alle ungeraden k . Bei $a_0 = 0, a_1 = 1$ gilt $a_k = 0$ bei geraden k . Es gilt in beiden Fällen, daß

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+2}}{a_k} \right| = 1,$$

weil in Zähler und Nenner der Rekursionsformel Polynome der Grade 2 mit Leitkoeffizienten ± 1 stehen, die keine Nullstellen für $k \in \mathbb{N}$ haben. Folglich konvergieren die Potenzreihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ auf $] -1, 1[$ für beide Wahlen der Anfangswerte, und mittels Linearkombination folgt dies für alle Anfangsbedingungen. Andererseits ist der Konvergenzradius der Potenzreihen auch nicht größer als 1.

Falls $n \in \mathbb{N}$ ist, ergibt sich

$$0 = a_{n+2} = a_{n+4} = \dots$$

so daß bei geradem n für $a_1 = 0$ und bei ungeradem n für $a_0 = 0$ Polynome als Lösungen auftreten. Diese Polynome heißen *Legendre-Polynome* für eine spezielle Wahl der Leitkoeffizienten (statt der Anfangsbedingungen): das Legendre-Polynom des Grades n hat den Leitkoeffizienten

$$\frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}.$$

Diese Wahl der Leitkoeffizienten ist durch die Anwendungen in der Potentialtheorie motiviert.

Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

In diesem Abschnitt untersuchen wir zunächst die auf $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ definierten Differentialgleichungen

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = 0$$

mit konstanten Koeffizientenfunktionen $a_i \in \mathbb{C}$. Nach Satz 16.7 besitzt jedes zugehörige Anfangswertproblem eine eindeutig bestimmte Lösung auf \mathbb{R} und die Lösungen bilden einen n -dimensionalen \mathbb{C} -Vektorraum. Falls die Koeffizienten reell sind, kann (und muß) man auch das entsprechende reelle Problem betrachten. Wir werden seine Lösungen aus den komplexwertigen ermitteln.

Wir versuchen, eine Lösung mit dem Exponentialansatz

$$f(x) = e^{\lambda}, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

zu finden. Da

$$f^{(k)}(x) = \lambda^k e^{\lambda},$$

folgt

$$f^{(n)} + a_{n-1}f^{(n-1)} + \dots + a_0f = (\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0)e^{\lambda x},$$

so daß f genau dann eine Lösung ist, wenn λ Nullstelle des *charakteristischen Polynoms*

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0$$

ist. Wir wissen, daß $P(\lambda)$ über \mathbb{C} in Linearfaktoren zerfällt, und wenn die Nullstellen

$$\lambda_1, \dots, \lambda_n$$

paarweise verschieden sind, bilden

$$f_1 = e^{\lambda_1 x}, \dots, f_n = e^{\lambda_n x}$$

ein Fundamentalsystem, denn die Wronski-Determinante für $x = 0$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & & \lambda_n \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

ist $\neq 0$. Sie ist ja gerade die Vandermonde-Determinante zu $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ mit dem Wert $\prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j)$. (Die lineare Unabhängigkeit von f_1, \dots, f_n wird weiter unten unabhängig von der Vandermonde-Determinante bewiesen.)

Durch Differentiation der Differentialgleichung folgt sofort, daß jede Lösung unendlich oft differenzierbar auf \mathbb{R} ist. Die Abbildung

$$D : f \mapsto f'$$

ist deshalb eine lineare Abbildung des Vektorraums $C_{\mathbb{C}}^{\infty}(\mathbb{R})$ aller auf \mathbb{R} unendlich oft differenzierbaren \mathbb{C} -wertigen Funktionen in sich. Sei

$$L : C_{\mathbb{C}}^{\infty}(\mathbb{R}) \rightarrow C_{\mathbb{C}}^{\infty}(\mathbb{R})$$

gegeben durch

$$L(f) = f^{(n)} + a_n f^{(n-1)} + \dots + a_0 f.$$

Wenn $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die paarweise verschiedenen Nullstellen von $P(\lambda)$ mit Vielfachheiten r_1, \dots, r_m sind, so gilt

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1} \dots (\lambda - \lambda_m)^{r_m}$$

und

$$L(f) = [(D - \lambda_1)^{r_1} \circ \dots \circ (D - \lambda_m)^{r_m}](f).$$

Dabei steht in der zweiten Gleichung λ_i für die Multiplikation mit λ_i auf $C_{\mathbb{C}}^{\infty}(\mathbb{R})$. Für die Gültigkeit dieser Gleichung hat man nur folgendes zu zeigen: Sei Q ein komplexes Polynom in der Unbestimmten λ ,

$$Q = b_n \lambda^n + \dots + b_0$$

und

$$R = (\lambda - \mu)Q = c_{n+1} \lambda^{n+1} + \dots + c_0$$

mit $\mu \in \mathbb{C}$; dann ist

$$c_{n+1} f^{(n+1)} + \dots + c_0 f = (D - \mu)[b_n f^{(n)} + \dots + b_0 f].$$

Dies rechnet man unmittelbar nach. Wir betrachten speziell den Fall

$$(D - \mu)^r (y) = 0.$$

Eine Lösung ist $h(x) = e^{\mu x}$, und weil diese Funktion keine Nullstelle hat, können wir zur Ermittlung aller Lösungen den Ansatz

$$f(x) = c(x)e^{\mu x}$$

machen – die uns vertraute Variation der Konstanten. Es ist

$$(D - \mu)f(x) = (c(x) \cdot \mu e^{\mu x} + c'(x)e^{\mu x} - \mu c(x)e^{\mu x}) = c'(x)e^{\mu x}.$$

Per Induktion folgt

$$(D - \mu)^r f(x) = c^{(r)}(x)e^{\mu x},$$

so daß

$$(D - \mu)^r((x)e^{ax}) = 0 \iff c^{(r)}(x) = 0.$$

Die r -te Ableitung von $c(x)$ verschwindet genau dann auf \mathbb{R} , wenn c ein Polynom des Grades $\leq r - 1$ ist. Folglich ist

$$e^{\mu x}, \quad xe^{\mu x}, \dots, x^{r-1}e^{\mu x}$$

ein Fundamentalsystem für $(D - \mu)^r(y) = 0$.

Sei nun

$$L = (D - \lambda_1)^{r_1} \circ \dots \circ (D - \lambda_m)^{r_m}.$$

Da es auf die Reihenfolge der Faktoren nicht ankommt, können wir $(D - \lambda_i)^{r_i}$ ganz nach rechts bewegen und sehen, daß alle Funktionen

$$e^{\lambda_i x}, xe^{\lambda_i x}, \dots, x^{r_i-1}e^{\lambda_i x}, \quad i = 1, \dots, m,$$

Lösungen unserer Differentialgleichung sind.

Satz 17.1. Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ die paarweise verschiedenen Nullstellen des Polynoms

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0$$

und r_1, \dots, r_m ihre Vielfachheiten.

Dann bilden die Funktionen

$$e^{\lambda_1 x}, \dots, x^{r_1-1}e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_m x}, \dots, x^{r_m-1}e^{\lambda_m x}$$

ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = 0.$$

Beweis. Einzig zu zeigen ist noch, daß die n aufgeführten Funktionen linear unabhängig sind. Dies kann man aus Sätzen der linearen Algebra ableiten, wir geben aber einen direkten Beweis.

Seien P_1, \dots, P_m Polynome und

$$f(x) = \sum_{i=1}^m P_i(x)e^{\lambda_i x},$$

wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ paarweise verschieden sind.

Unsere Behauptung läuft darauf hinaus, daß $f(x)$ genau dann die Nullfunktion ist, wenn alle P_i Null sind. Wir zeigen dies durch Induktion über m . Durch Multiplikation mit $e^{-\lambda_m x}$ ergibt sich

$$0 = \sum_{i=1}^{m-1} P_i(x)e^{\mu_i x} + P_m(x)$$

mit $\mu_i = \lambda_i - \lambda_m$. Wir differenzieren nun $(r + 1)$ -mal, wobei $r = \text{grad } P_m$. Dann erhalten wir eine Gleichung

$$0 = \sum_{i=1}^{m-1} Q_i(x) e^{\mu_i x}.$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist $Q_i = 0$ für $i = 1, \dots, m - 1$. Die Produktregel zeigt andererseits

$$\text{grad } Q_i = \text{grad } P_i,$$

so daß $Q_i \neq 0$ sein müßte für $P_i \neq 0$. \square

Da auch bei reellen a_{n-1}, \dots, a_0 die Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ nicht reell zu sein brauchen, liefert uns Satz 17.1 im allgemeinen kein reelles Fundamentalsystem. Falls $\lambda_j \notin \mathbb{R}$, ist aber auch $\overline{\lambda_j} \neq \lambda_j$ Nullstelle von

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_0,$$

und zwar mit der gleichen Vielfachheit. Sei $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$. Dann ist

$$e^{\lambda_j x} = e^{\alpha_j x} (\cos(\beta_j x) + i \sin(\beta_j x)),$$

$$e^{\overline{\lambda_j} x} = e^{\alpha_j x} (\cos(\beta_j x) - i \sin(\beta_j x))$$

und umgekehrt sind $e^{\lambda_j x}$ und $e^{\overline{\lambda_j} x}$ Linearkombinationen von

$$e^{\alpha_j x} \cos(\beta_j x) \quad \text{und} \quad e^{\alpha_j x} \sin(\beta_j x).$$

Diese reellen Funktionen sind also Lösungen der Differentialgleichung und entsprechendes gilt für

$$x^k e^{\alpha_j x} \cos(\beta_j x), \quad x^k e^{\alpha_j x} \sin(\beta_j x),$$

$k = 0, \dots, r_j - 1$.

Satz 17.2. Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$, $\mu_1, \dots, \mu_q \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ und $\overline{\mu}_1, \dots, \overline{\mu}_q$ die paarweise verschiedenen Nullstellen von

$$\lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_0,$$

mit den Vielfachheiten r_1, \dots, r_p und s_1, \dots, s_q . Ferner sei $\mu_j = \alpha_j + i\beta_j$, $j = 1, \dots, q$. Dann bilden die Funktionen

$$\left. \begin{aligned} & e^{\lambda_j x}, \dots, x^{r_j-1} e^{\lambda_j x}, \quad j = 1, \dots, p, \\ & e^{\alpha_j x} \cos(\beta_j x), \dots, x^{s_j-1} e^{\alpha_j x} \cos(\beta_j x), \\ & e^{\alpha_j x} \sin(\beta_j x), \dots, x^{s_j-1} e^{\alpha_j x} \sin(\beta_j x), \end{aligned} \right\} \quad j = 1, \dots, q,$$

ein Fundamentalsystem für

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = 0.$$

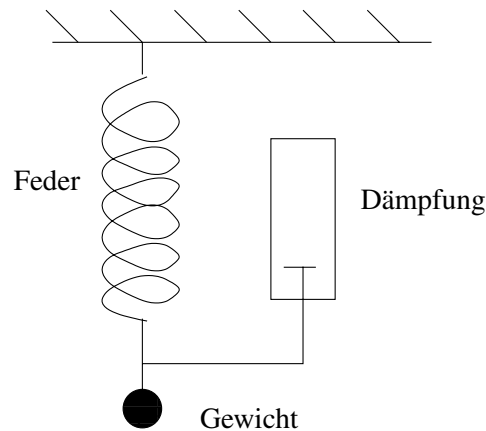


ABBILDUNG 1. Schwingungsfähiges System mit Dämpfung

Wir diskutieren Satz 17.2 am vielleicht wichtigsten Fall, dem der Differentialgleichung

$$my'' + ry' + ky = 0.$$

Sie beschreibt die einfachsten schwingungsfähigen Systeme:

Sei m die Masse des Gewichts, r der Reibungsfaktor und k die Federkonstante. Wir nehmen an, die Reibung sei proportional zur Geschwindigkeit (und die entsprechende Kraft dieser entgegengesetzt). Wir schreiben die Auslenkung in der Form $y_0 + y$, wobei y_0 die Auslenkung ist, in der die Federkraft die Schwerkraft kompensiert. Nach dem zweiten Newtonschen Gesetz und dem Hookschen Gesetz ist

$$my'' = m \cdot g - ry' - k(y + y_0) = -ry' - ky$$

weil $m \cdot g = k \cdot y_0$. Damit erhalten wir die obige Differentialgleichung oder

$$y'' + \frac{r}{m}y' + \frac{k}{m} = 0.$$

Das charakteristische Polynom ist

$$\lambda^2 + \frac{r}{m}\lambda + \frac{k}{m}$$

mit den Nullstellen

$$\lambda_{1,2} = -\frac{r}{2m} \pm \sqrt{\frac{1}{m^2} \left(\frac{r^2}{4} - mk \right)} = -\frac{r}{2m} \pm \frac{1}{2m} \sqrt{r^2 - 4mk}.$$

Man beachte im folgenden, daß $m, k > 0, r \geq 0$. Sei

$$\Delta = r^2 - 4mk.$$

Das Verhalten des Systems hängt nun entscheidend davon ab, ob $\Delta > 0, \Delta = 0$ oder $\Delta < 0$ ist.

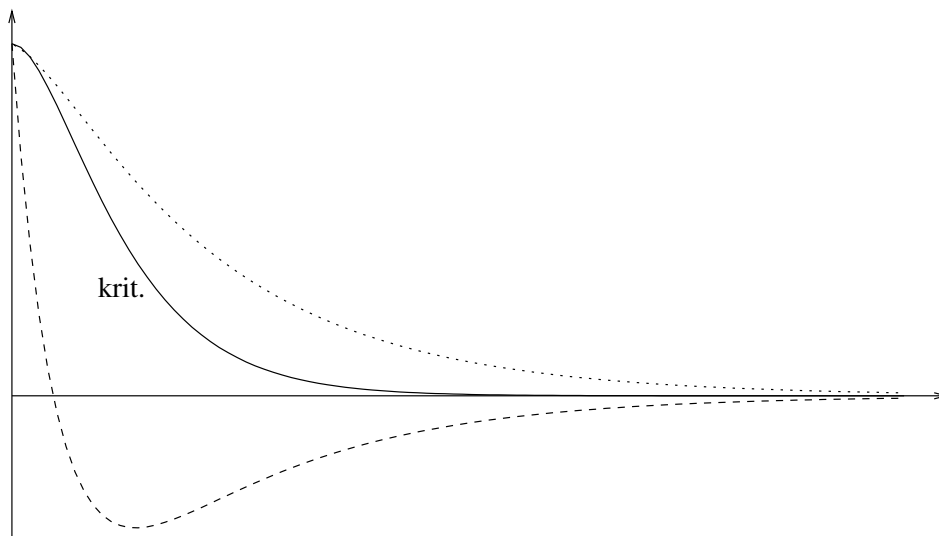


ABBILDUNG 2. Stark gedämpfte und kritisch gedämpfte Systeme

(a) $\Delta > 0$. In diesem Fall sind $\lambda_1, \lambda_2 < 0$,

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Man kann zeigen, daß $y(t)$ höchstens eine Nullstelle hat. Es gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$:

Welcher Verlauf $y(t)$ nimmt, hängt natürlich noch von den Anfangswerten ab.

Man sagt im Fall $\Delta > 0$, daß das System *stark gedämpft* ist.

(b) $\Delta = 0$. In diesem Fall ist $\lambda = \lambda_{1,2} = -(r/2m)$ doppelte Nullstelle

$$y(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}.$$

Das qualitative Verhalten ist das gleiche wie in Fall (a). Man spricht vom *aperiodischen Grenzfall* oder *kritischer Dämpfung*. Bei Systemen, die möglichst schnell in die Ruhelage zurückkehren sollen, versucht man die Reibung so einzustellen, daß der aperiodische Grenzfall vorliegt.

(c) $\Delta < 0$. In diesem Fall ist

$$\lambda_{1,2} = a \pm ib$$

mit $a = -(r/2m)$, $b = \sqrt{|r^2 - 4mk|}$,

$$y(t) = c_1 e^{at} \cos bt + c_2 e^{at} \sin bt.$$

Man spricht von einem *schwingenden System*. Falls $r > 0$ ist, gilt auch hier $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$. Im Fall $r = 0$ ist $y(t)$ periodisch und das System schwingt ungedämpft. Man nennt b die *Eigenfrequenz* des Systems.

Die Sätze 17.1 und 17.2 geben eine perfekte Antwort auf die Frage nach den Lösungen einer homogenen linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Im inhomogenen Fall kann man immer auf die Variation der Konstanten

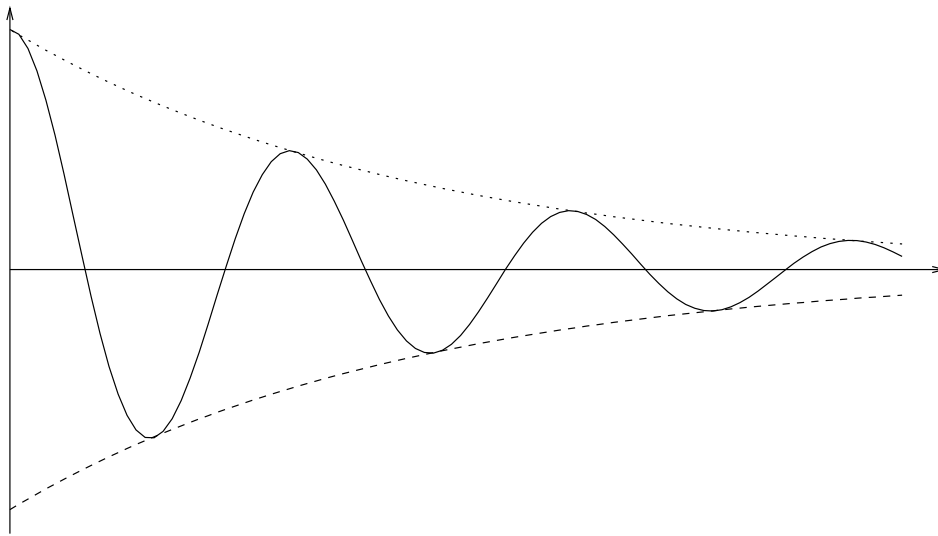


ABBILDUNG 3. Gedämpfte Schwingung

zurückgreifen. In manchen Fällen ist es aber einfacher, die Gleichung mittels eines speziellen Ansatzes zu lösen.

Satz 17.3. Sei $Q(x)$ ein Polynom des Grades a . Dann besitzt die Differentialgleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0y = Q(x)e^{\mu x}$$

eine Lösung der Form $R(x)e^{\mu x}$, wobei $R(x)$ ein Polynom des Grades $k + r$ ist und r die Vielfachheit von μ als Nullstelle von $P(\lambda)$ angibt.

Beweis. Wir schreiben die Gleichung in der Form

$$(D - \lambda_1) \cdot (D - \lambda_2) \circ \cdots \circ (D - \lambda_n)y = Q(x)e^{\mu x}.$$

Sei $g_0 = Q(x)e^{\mu x}$. Wenn wir Funktionen g_n, \dots, g_1 bestimmen mit

$$(D - \lambda_j)g_j = g_{j-1},$$

ist g_n eine Lösung der Differentialgleichung. Daher genügt es den Fall $n = 1$ zu behandeln,

$$y' - ay = Q(x)e^{\mu x}.$$

Auf ihn kann man nun Satz 14.4 mit $u = v = 0$ anwenden, und erhält die Behauptung. \square

Bei der praktischen Lösung des Problems wird man $R(x)$ mit unbestimmten Koeffizienten ansetzen und das sich durch Koeffizientenvergleich ergebende lineare Gleichungssystem lösen. Dieses besitzt allerdings keine eindeutige Lösung, falls μ wirklich Nullstelle von $P(\lambda)$ ist, denn die Lösungen der homogenen Gleichung sind dann ja ebenfalls von der Form $R(x)e^{\mu x}$. Wir geben in einem Spezialfall die Lösungen explizit an:

Satz 17.4. *Eine spezielle Lösung der Differentialgleichung*

$$y'' + ay' + b = ce^{\mu x},$$

$a, b, c, \mu \in \mathbb{C}$ wird gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} ce^{\mu x} / P(\mu), & P(\mu) \neq 0, \\ cx e^{\mu x} / P'(\mu), & P(\mu) = 0, P'(\mu) \neq 0, \\ cx^2 e^{\mu x} / P''(\mu), & P(\mu) = 0, P'(\mu) = 0. \end{cases}$$

Dabei ist P das charakteristische Polynom.

Dies kann man direkt nachprüfen. Die Fallunterscheidung betrifft die Fälle, in denen μ keine, einfache oder doppelte Nullstelle von P ist.

Wir betrachten noch einmal Schwingungen, und zwar „erzwungene“ Schwingungen des gedämpften harmonischen Oszillators:

$$my'' + ry' + ky = \cos \omega t.$$

In diesem Fall wird das System durch eine äußere periodische Kraft „erregt“, deren Amplitude wir der Einfachheit halber als 1 angenommen haben.

Um Satz 17.4 anwenden zu können, „komplexifizieren“ wir die Aufgabe und betrachten

$$my'' + ry' + ky = \cos \omega t + i \sin \omega t = e^{i\omega t}.$$

Da $r, m, k \in \mathbb{R}$ können nur drei Fälle eintreten:

(a) Wenn $r \neq 0$ ist, hat das charakteristische Polynom keine rein imaginäre Nullstelle; es gilt (komplex)

$$y(t) = \frac{(1/m)e^{i\omega t}}{-\omega^2 + i(r/m)\omega + (k/m)} = \frac{e^{i\omega t}}{(k - m\omega^2) + ir}.$$

Dann ist

$$\operatorname{Re} y(t) = \frac{(k - m\omega^2) \sin \omega t - r\omega \cos \omega t}{(k - m\omega^2)^2 + (r\omega)^2} = A_\omega \cdot \cos(\omega t - \delta),$$

wobei

$$A_\omega = \frac{1}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (r\omega)^2}}.$$

Da jede Lösung der homogenen Gleichung „abklingt“, ist nach einem „Einschwingvorgang“ das System in einer ungedämpften Schwingung mit der Amplitude A_ω , die der erregenden Kraft mit dem „Phasenwinkel“ δ nacheilt. (Wir verzichten darauf, δ auszurechnen.) Die Funktion

$$\omega \mapsto A_\omega$$

ist die „Durchlaßkurve“ des Systems.

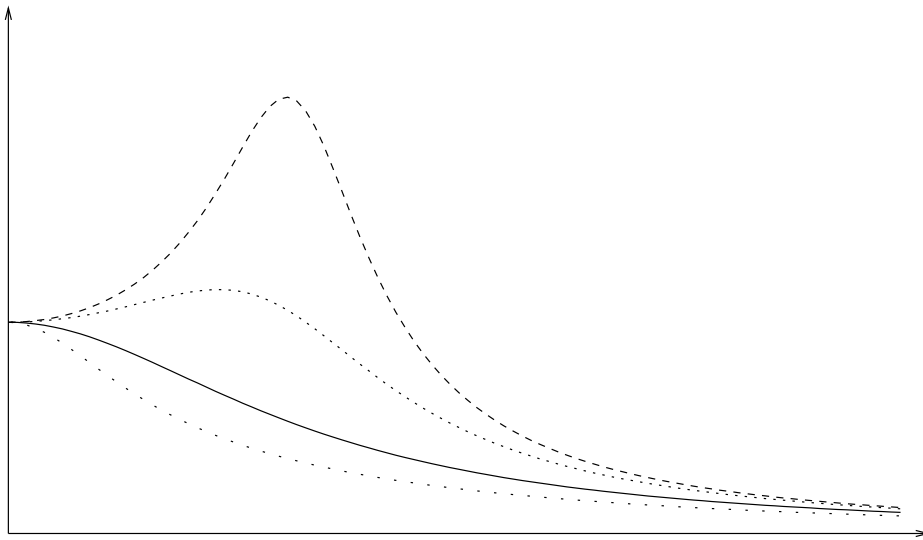


ABBILDUNG 4. Durchlaßkurven

Je nach Anwendung möchte man sie möglichst flach haben oder mit einem ausgeprägten Maximum, der „Resonanzfrequenz“. (Die Durchlaßkurve hat höchstens ein Maximum.)

(b) Falls im Fall $r = 0$ die erregende Frequenz ω von der Eigenfrequenz des Systems verschieden ist, liegt ein ähnlicher Fall wie (a) vor, abgesehen davon, daß die Eigenschwingung nicht abklingt.

(c) Im Fall $r = 0$ und $P(i\omega) = 0$ ist

$$\operatorname{Re} y(t) = \frac{1}{2\sqrt{km}} t \sin \omega t.$$

Die Schwingung „schaukelt sich auf“, die Amplitude wächst unbegrenzt mit t .

ABSCHNITT 18

Systeme linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Wir schreiben die in 17 diskutierte Differentialgleichung $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = 0$ in ein äquivalentes System erster Ordnung um:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ &\vdots \\ y_{n-1}' &= y_n \\ y_n' &= -a_0y_1 - \dots - a_{n-1}y_n \end{aligned}$$

mit der Entsprechung $y_1 \leftrightarrow y$, $y_2 \leftrightarrow y'$ usw. Dann ist

$$y' = Ay$$

mit der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & \dots & \dots & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

und man sieht sofort, daß das charakteristische Polynom von

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = 0$$

gerade das charakteristische Polynom von A ist (eventuell bis auf das Vorzeichen, je nach Definition).

Dies läßt vermuten, daß für das System

$$y' = Ay$$

mit einer konstanten $n \times n$ -Matrix A die Eigenwerte von A eine wichtige Rolle spielen. Dies ist schnell überprüft:

Satz 18.1. Sei $w \in \mathbb{K}^n$ ein Eigenvektor der Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ zum Eigenwert λ . Dann ist $w \cdot e^{\lambda x}$ eine Lösung von $y' = Ay$.

Beweis.

$$(w \cdot e^{\lambda x})' = \lambda w e^{\lambda x} = A(w e^{\lambda x}). \quad \square$$

Die Folgerung ergibt sich sofort:

Satz 18.2. *Die Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ besitze linear unabhängige Eigenvektoren w_1, \dots, w_n zu den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Dann ist*

$$w_1 e^{\lambda_1 x}, \dots, w_n e^{\lambda_n x}$$

ein Fundamentalsystem für $y' = Ay$.

Beweis. Die Werte der Abbildungen $x \mapsto w_i e^{\lambda_i x}$ bilden für $x = 0$ die Matrix mit den Spalten w_1, \dots, w_n und diese sind nach Voraussetzung linear unabhängig. \square

Speziell wenn A n verschiedene Eigenwerte besitzt, gibt es auch n linear unabhängige Eigenvektoren, und man kann sofort 18.2 anwenden. Im allgemeinen ist dies jedoch nicht der Fall.

Wir probieren nun eine Substitution

$$z = By,$$

wobei B eine invertierbare $n \times n$ -Matrix über \mathbb{K} ist. Dann ist

$$z' = By' = BAy = BAB^{-1}z.$$

Wenn wir $z' = (BAB^{-1})z$ lösen können, gewinnen wir y als $B^{-1}z$.

Im Fall, daß A n linear unabhängige Eigenvektoren besitzt, können wir B so wählen, daß

$$BAB^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

eine Diagonalmatrix mit den Eigenwerten von A in der Diagonale ist. Wir erhalten dann für z das „entkoppelte“ System

$$\begin{aligned} z'_1 &= \lambda_1 z_1 \\ &\vdots \\ z'_n &= \lambda_n z_n. \end{aligned}$$

Diese n Gleichungen können wir einzeln lösen und die Rücksubstitution führt uns auf 18.2.

Das Bestmögliche, das wir im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ im allgemeinen erreichen können, ist die Transformation in die *Jordansche Normalform*

$$BAB^{-1} = \begin{bmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_r \end{bmatrix}$$

wobei J_i für eine quadratische Matrix

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

steht. Es genügt, einen der *Jordanblöcke* J_i zu betrachten. Wir verzichten darauf, die Lösung für $A = J_i$ herzuleiten, sondern geben direkt eine Lösung an

Satz 18.3. *Sei*

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix} \in M(r \times r, \mathbb{K}).$$

Dann ist

$$\begin{bmatrix} e^{\lambda x} & xe^{\lambda x} & \frac{1}{2}x^2e^{\lambda x} & \dots & \frac{1}{(r-1)!}\lambda^{r-1}e^{\lambda x} \\ 0 & e^{\lambda x} & xe^{\lambda x} & \dots & \vdots \\ \vdots & 0 & e^{\lambda x} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & xe^{\lambda x} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{\lambda x} \end{bmatrix}$$

ein *Fundamentalsystem* für $y' = Jy$.

Wir verzichten darauf, ein größeres Beispiel zu rechnen. Der wesentliche Punkt ist natürlich die Transformation von A in die Jordansche Normalform. Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ muß man am Schluß die eventuell komplexen Exponentialfunktionen noch durch ihre Real- und Imaginärteile ersetzen. Ebenso verzichten wir darauf, spezielle Ansätze für spezielle inhomogene Gleichungen zu diskutieren.

Ausführlich besprechen wollen wir aber den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $n = 2$. Dabei gehen wir kurz auf die qualitative Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen ein.

Bei vielen Anwendungen ist es wichtig, Differentialgleichungen möglichst präzise zu lösen. Man denke etwa an die Berechnung von Satellitenbahnen. Bei anderen Anwendungen ist dies aber von vornherein ausgeschlossen, und zwar einfach deshalb, weil die Anfangsbedingungen oder Parameter in den Differentialgleichungen nicht genau genug bestimmt werden können. Dennoch möchte man gern verlässliche Aussagen über das Langzeitverhalten des Systems machen und zum Beispiel wissen, ob es einem Gleichgewichtszustand entgegenstrebt oder vielleicht periodisches Verhalten zeigt oder womöglich „chaotisch“ ist.

Man kann insbesondere das qualitative Verhalten eines Systems gut anhand eines *Phasenporträts* darstellen. Der Anschaulichkeit halber und weil es bei den

meisten Anwendungen der Fall ist, bezeichnen wir die unabhängige Variable als *Zeit* t . Wenn dann

$$y' = F(t, y)$$

ein System von n Gleichungen ist, definiert auf $U = I \times \tilde{U}$, $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$, so bezeichnet man \tilde{U} als *Phasenraum* des Systems, dessen Punkte die möglichen Zustände des physikalischen oder biologischen Systems darstellen. Die Lösungsfunktionen $y_1(t), \dots, y_n(t)$, $t \in J \subset I$, beschreiben dann den Weg

$$(y_1(t), \dots, y_n(t)), \quad t \in I,$$

des Systems im Phasenraum. Wenn man nun diese Wege für verschiedene Anfangsbedingungen verfolgt, erhält man einen Überblick über das System, insbesondere über die Abhängigkeit der Lösungen von den Anfangsbedingungen.

Dabei ist noch eine Einschränkung zu machen. Ein vollständiger Satz von Anfangsbedingungen besteht aus den Werten a_1, \dots, a_n der Funktion y_1, \dots, y_n zu einem Zeitpunkt t_0 . Daher laufen im allgemeinen durch jeden Punkt $(a_1, \dots, a_n) \in \tilde{U}$ unendlich viele verschiedene Lösungen des Differentialgleichungssystems, nämlich für jeden Zeitpunkt t_0 eine möglicherweise andere Lösung. Man kann also nicht von *der* Bahn des Systems durch (a_1, \dots, a_n) sprechen. Möglich ist dies aber für *autonome* Systeme

$$y' = F(y),$$

bei denen t nicht explizit auf der rechten Seite vorkommt und daher stets $I = \mathbb{R}$ gewählt werden kann. Für autonome Systeme gilt

$$y(t) \text{ Lösung des Systems} \iff y(t + t_0) \text{ ist Lösung}$$

für jedes feste $t_0 \in \mathbb{R}$. Daher spielt t_0 nur noch eine Rolle für das Definitionsintervall der Lösung. Wenn wir t_0 durch t'_0 ersetzen, verschiebt es sich um $t'_0 - t_0$ in \mathbb{R} .

Für ein autonomes System $y' = F(y)$ auf $\mathbb{R} \times \tilde{U}$ und $(a_1, \dots, a_n) \in \tilde{U}$ bezeichnen wir mit

$$\{y_1(t), \dots, y_n(t) : t \in J\}$$

die *Bahn* (oder den *Orbit* oder die *Trojektorie*) des Systems durch (a_1, \dots, a_n) . Dabei ist $t_0 \in \mathbb{R}$ beliebig zu wählen und J das maximale Definitionsintervall der Lösung von $y' = F(y)$ zu den Anfangswerten $y_1(t_0), \dots, y_n(t_0)$.

Falls $F(a_1, \dots, a_n) = 0$, ist $y_i(t) = a_i$, $i = 1, \dots, n$, die Lösung zu der Anfangsbedingung $y_i(0) = a_i$, $i = 1, \dots, n$. Die Bahn entartet zu einem einzelnen Punkt, und man nennt (a_1, \dots, a_n) einen *stationären* oder *kritischen* Punkt.

Beispiel 18.4.

$$\begin{aligned} y'_1 &= -y_2 \\ y'_2 &= y_1. \end{aligned}$$

Das System ist autonom. Sei

$$(a_1, a_2) = r(\cos \varphi, \sin \varphi) \in \mathbb{R}^2, \quad r > 0.$$

Dann ist

$$(y_1(t), y_2(t)) = r(\cos(\varphi + t), \sin(\varphi + t))$$

die auf ganz \mathbb{R} definierte Lösung zu den Anfangswerten $y_1(0) = a_1, y_2(0) = a_2$. Die zugehörige Bahn des Systems ist ein Kreis mit Radius r um 0: (siehe Abbildung 1)

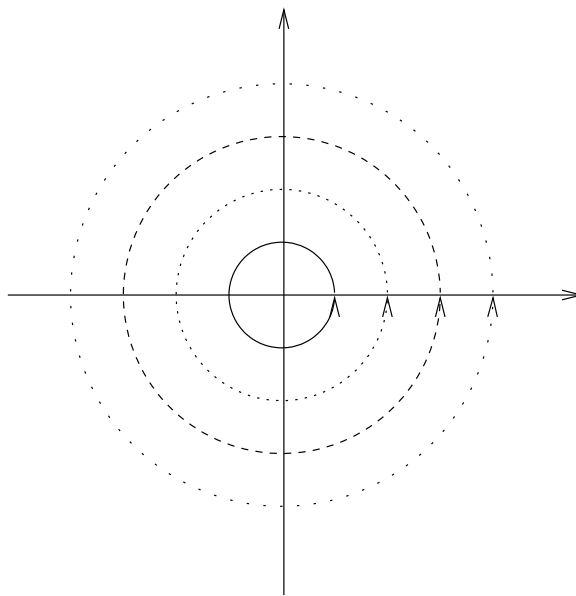


ABBILDUNG 1. Ein Wirbel

Dabei deuten die Pfeilspitzen die Durchlaufungsrichtung der Bahnen an. Zusätzlich kann man noch Markierungen für die Zustände zu äquidistanten Zeitpunkten anbringen und erhält so einen Überblick über die Durchlaufgeschwindigkeit.

Wir wollen in dieser Terminologie die linearen Systeme mit konstanten Koeffizienten für $n = 2, \mathbb{K} = \mathbb{R}$ untersuchen und klassifizieren.

Um die Diskussion nicht allzusehr auszudehnen, beschränken wir uns auf den Fall, in dem der Nullpunkt der einzige kritische Punkt ist. Sei also das System

$$y' = Ay, \quad A \in M(2 \times 2, \mathbb{R}),$$

gegeben. Nach Koordinatentransformation können wir annehmen, daß A eine der folgenden Matrizen ist:

$$D(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad E(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad R(\alpha, \omega) = \begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix}.$$

Im ersten Fall ist natürlich $\lambda = \mu$ möglich. Die Fälle entsprechen der Existenz zweier linear unabhängiger Eigenvektoren, nur (im wesentlichen) eines Eigenvektors und schließlich keines Eigenvektors.

Die kritischen Punkte sind gerade die Lösungen des homogenen linearen Gleichungssystems

$$Ax = 0,$$

so daß 0 der einzige kritische Punkt genau dann ist, wenn $\det A \neq 0$ ist. Also gilt $\lambda, \mu \neq 0$ für $D(\lambda, \mu)$, $\lambda \neq 0$ für $E(\lambda)$ und $\alpha^2 + \omega^2 \neq 0$ für $R(\alpha, \omega)$.

Wir können die Diskussion noch etwas vereinfachen, wenn wir beachten, daß die „Zeitumkehr“, die Substitution $t \rightarrow -t$, einfach bewirkt, daß A durch $-A$ ersetzt wird. Die Phasenporträts der Systeme

$$y' = Ay \quad \text{und} \quad y' = -Ay$$

stimmen überein – der einzige Unterschied ist die Durchlaufungsrichtung der Bahnen.

(a) $\lambda, \mu > 0$:

$$y_1(t) = a_1 e^{\lambda t}, \quad y_2(t) = a_2 e^{\mu t}.$$

Die nicht entarteten Bahnen bestehen aus den Koordinatenhalbachsen ($a_1 = 0$ oder $a_2 = 0$), den durch die Gleichung

$$y_\lambda = \frac{(a_1)^{\mu/\lambda}}{a_2} y_1^{\mu/\lambda}$$

gegebenen Kurven für $a_1 > 0$ und den entsprechenden symmetrischen Bildern für $a_1 < 0$. Beachte, daß $\mu/\lambda > 0$.

Im Fall $\mu = 2\lambda$ bestehen die von den Koordinatenhalbachsen bestehenden Bahnen aus Parabelästen, im Fall $\mu = \lambda$ aus Halbgeraden usw.

Man bezeichnet den kritischen Punkt 0 als *instabilen Knoten*: alle Bahnen, die nicht im Nullpunkt starten, entfernen sich von ihm. Es gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} y_1(t) = \pm\infty$, $\lim_{t \rightarrow \infty} y_2(t) = \pm\infty$ (siehe Abbildung 2).

(b) $\lambda, \mu < 0$. Die Bahnen sind mit denen des Falles (a) (für $-\lambda, -\mu$) identisch, werden aber genau entgegengesetzt durchlaufen: Der Punkt 0 ist ein *stabiler Knoten*:

$$\lim_{t \rightarrow 0} (y_1(t), y_2(t)) = 0.$$

(c) $\lambda < 0, \mu > 0$. Aus den Potenzkurven des Falles (a) zu positiven Exponenten, werden nun solche zu negativen Exponenten:

Es gibt zwei Bahnen, die auf den Nullpunkt zulaufen. Es gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} y_1(t) = \infty$, $\lim_{t \rightarrow \infty} y_2(t) = 0$ (mit Ausnahme der x -Halbachsen). Man spricht in diesem Fall von einem *Sattelpunkt* (siehe Abbildung 3).

(d) $E(\lambda)$, $\lambda > 0$. Das typische Bild ist Abbildung 4. Wir verzichten auf die genaue Rechnung. Wie im Fall (a) ist $\lim_{t \rightarrow \infty} y_1(t) = \pm\infty$, $\lim_{t \rightarrow \infty} y_2(t) = \pm\infty$

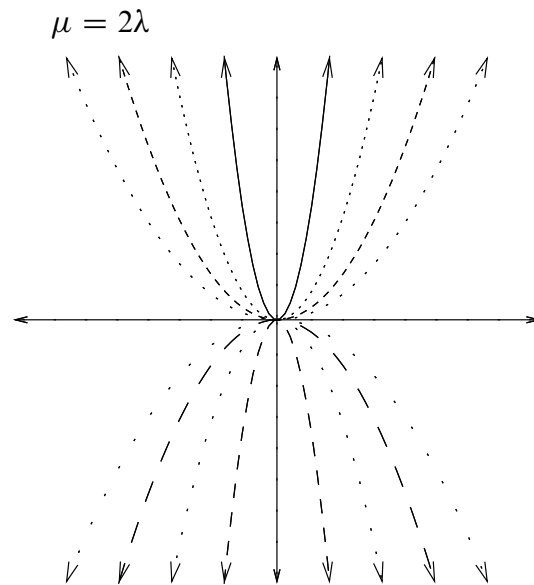


ABBILDUNG 2. Instabiler Knoten

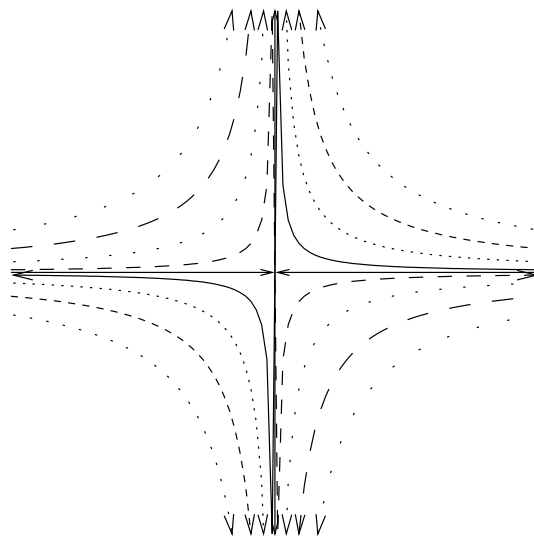


ABBILDUNG 3. Sattelpunkt

(für Anfangswerte außerhalb der x -Achse). Auch in diesem Fall ist 0 ein *instabiler Knoten*.

(e) $E(\lambda)$, $\lambda < 0$. Ein *stabiler Knoten*, $\lim_{t \rightarrow \infty} y_1(t)$, $\lim_{t \rightarrow \infty} y_2(t) = 0$ für alle Anfangswerte. Das Phasenporträt ergibt sich durch Zeitumkehr aus dem von (d).

(f) $R(\alpha, \omega)$, $\alpha = 0$. Es gilt

$$(y_1(t), y_2(t)) = r(\cos(\omega t + \varphi), \sin(\omega t + p))$$

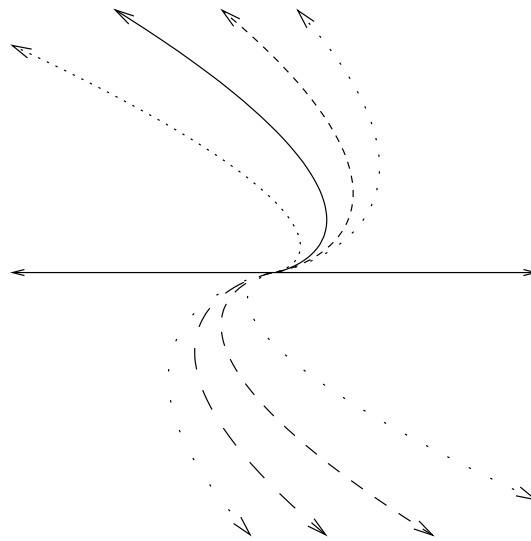


ABBILDUNG 4. Instabiler Knoten

für den Anfangswert

$$(y_1(0), y_2(0)) = r(\cos \varphi, \sin \varphi).$$

Die Bahnen bestehen aus Kreisen mit Mittelpunkt 0, die für $\omega > 0$ gegen den Uhrzeigersinn, für $\omega < 0$ mit ihm durchlaufen werden. Man spricht von einem *Zentrum* oder *Wirbel* (siehe Abbildung 1). Man beachte aber, daß ohne Transformation auf Normalform (die ja im allgemeinen keine orthogonale Abbildung ist), die Bahnen lediglich Ellipsen sind.

(g) $R(\alpha, \omega)$, $\alpha > 0$. Aus den Kreisen werden nun vom Nullpunkt weglaufende Spiralen:

$$(y_1(t), y_2(t)) = r \cdot e^{\alpha t} (\cos(\omega t + \varphi), \sin(\omega t + \varphi))$$

für $(y_1(0), y_2(0)) = r(\cos \varphi, \sin \varphi)$.

Wir haben in 0 einen *instabilen Strudel* (siehe Abbildung 5). Bei $\omega > 0$ ist die Drehrichtung gegen, bei $\omega < 0$ mit dem Uhrzeigersinn. Sowohl y_1 als auch y_2 oszillieren mit unbeschränkt wachsender Amplitude.

(h) $R(\alpha, \omega)$, $\alpha < 0$. Man gewinnt das Phasenporträt durch Zeitumkehr aus dem von (g). Für diesen *stabilen Strudel* in 0 ist $\lim_{t \rightarrow \infty} y_1(t), \lim_{t \rightarrow \infty} y_2(t) = 0$.

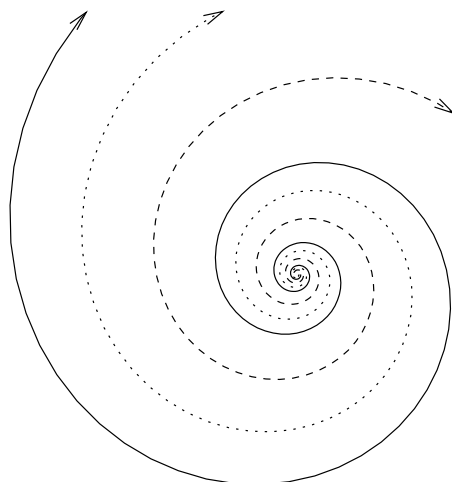


ABBILDUNG 5. Instabiler Strudel

Literaturverzeichnis

- [Fors] Forster, O.: Lehrbuch der Analysis
- [Heus] Heuser, H.: Lehrbuch der Analysis, Teil 2
- [StWi] Storch, U. und Wiebe, H.: Lehrbuch der Mathematik, Band 3
- [Walt] Walter, W.: Analysis 2
- [ReTr] Reiffen, H.-J. und Trapp, H.W.: Einführung in die Analysis. Osnabriick 1999