

# Die wohltemperierte Mathematik

Winfried Bruns

FB Mathematik/Informatik  
Universität Osnabrück

wbruns@uos.de

Osnabrück, den 25.11.2011

*Musik ist eine Wissenschaft, die wohlbestimmte Regeln haben sollte. Diese Regeln sollten aus einem unmittelbar einsichtigen Prinzip abgeleitet werden. Dieses Prinzip kann ohne Hilfe der Mathematik nicht erkannt werden. Trotz all der Erfahrungen, die ich in der Musik erworben haben mag durch meine so lange Verbindung mit ihr, muss ich gestehen, dass nur mit Hilfe der Mathematik meine Ideen klar geworden sind und Licht die Dunkelheit ersetzt hat, die mir zuvor nicht bewusst war.*

J. Ph. Rameau (1722)

J. S. Bach veröffentlichte 1722 (Teil I) und 1740/42 (Teil II) zwei Sammlungen von jeweils 24 Präludien und Fugen in allen Dur- und Molltonarten unter dem Titel

## Das wohltemperierte Klavier

Zwei der Präludien (C-Dur und Cis-Dur aus Teil I) werden uns durch den Vortrag begleiten.

Was heißt **wohltemperiert** ?

Anmerkung: Ähnliche Zyklen zuvor von Froberger und Matheson.

# Weshalb zwölf Halbtöne?



**Naturgesetz** oder **kulturelle Errungenschaft** ?

Die Frage ist schwer zu beantworten, es gibt aber Gründe, die diese Wahl nahe liegend erscheinen lassen.

Auf dem Klavier ergeben 12 Quinten 7 Oktaven. Also

$$12 \text{ Quinten} = 7 \text{ Oktaven}$$

$$1 \text{ Quinte} = \frac{7}{12} \text{ Oktave}$$

Wenn wir die Oktave in 12 Halbtonschritte einteilen, erhalten wir nach 7 Schritten die Quinte.

# Die Entdeckungen der Pythagoreer (ca. 500 v. Chr.)

In unserer Sprache lassen sie sich so beschreiben:

- Die Frequenzen der Töne in natürlichen Intervallen stehen im **Verhältnis ganzer Zahlen**:

Oktave	2:1	große Terz	5:4
Quinte	3:2	kleine Terz	6:5
Quarte	4:3		

- Je **kleiner**, die beteiligten Zahlen, desto **konsonanter** das Intervall.

Beispiel einer **Dissonanz** ist der Halbtonschritt von 16:15.

Heutige Erklärung: Je mehr Obertöne die Töne eines Intervalls oder Akkords gemeinsam haben, desto eher wird er als konsonant empfunden.

# Ein Widerspruch

Gilt wirklich

$$1 \text{ Quinte} = \frac{7}{12} \text{ Oktave} ??$$

Das hieße ja, in Frequenzverhältnisse übertragen,

$$\begin{aligned}\frac{3}{2} &= 2^{7/12} \\ \left(\frac{3}{2}\right)^{12} &= 2^7 \\ 3^{12} &= 2^{19} ??\end{aligned}$$

Aber

$$\frac{3^{12}}{2^{19}} = \frac{531.441}{524.228} \approx 1,0136.$$

Dieses Zahlenverhältnis heißt **pythagoräisches Komma**.

# Die pythagoräische Stimmung (bis 1300)

Prinzip: Ausgehend von einem Grundton, etwa C, stimmen wir die 12 Töne in einer Oktave, indem wir in reinen Quinten aufsteigen und immer dann, wenn wir aus der vorgegebenen Oktave herauskommen, eine Oktave nach unten springen.

Die pythagoräische Stimmung klingt gut für einstimmige Musik und zweistimmige Werke in Quint- oder Quartparallelen.

Hauptprobleme:

- Die **letzte Quinte** trägt die Last des pythagoräischen Kommas. Selbst wenn man diese verstecken kann:
- Die **großen Terzen**, die um 1300 in Mode kamen, sind zu weit.

# Das syntonische Komma

Von C ausgehend erreichen wir die große Terz nach vier Quinten aufwärts und zwei Oktaven abwärts. Also in pythagoräischer Stimmung:

$$E:C = \left(\frac{3}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3^4}{2^6} = \frac{81}{64} \neq \frac{80}{64} = \frac{5}{4}.$$

Der Fehler

$$\frac{81}{80} = 1,0125$$

heißt **syntonisches Komma**.



# Die reine Stimmung (1300–1800)

Man stimmt die Töne einer Dur-Tonleiter, etwa C-Dur, mit Hilfe reiner Dreiklänge im Verhältnis 4:5:6 auf Tonika, Dominante und Subdominante:

$$C:E:G, G:H:D, F:A:C = 4:5:6$$

Natürlich sind noch 5 weitere Töne unterzubringen. Dies erlaubt zahlreiche Varianten.

Anmerkung: Es gibt große und kleine Ganztöne,  $D:C$ ,  $G:F$ ,  $H:A = 9:8$ ,  $E:D$ ,  $A:G = 10:9$ .

Die reine Stimmung klingt in ihrer Ausgangstonart brillant. Sie trägt ihren Namen zu Recht, und wir können sie als Referenz wählen.

Problem: Harmonische Progressionen sind so gut wie unmöglich, entfernte Tonarten klingen sehr schlecht.

# Die mitteltönige Stimmung (ab 1450)

Grundidee: Die Quinten werden um ein  $1/4$  syntonisches Komma vermindert, so dass tatsächlich eine reine Terz nach 4 Quintschritten erreicht wird.

Der Quintenzirkel schließt sich nicht. Im Gegenteil, die letzte Quinte ist um  $11/4$  syntonische Kommas vermindert. Bei Aufrechnung mit dem pythagoräischen Komma bleibt die berüchtigte

**Wolfsquinte**  $\approx 1/8$  Ton zu weit.

Auch von der mitteltönigen Stimmung gibt es viele Varianten. Sie kommt immer noch in vielen historischen Orgeln vor.

Die mitteltönige Stimmung klingt nahe der Ausgangstonart gut, weit weg davon ist sie aber praktisch nicht spielbar. (Erweiterung der spielbaren Tonarten durch Instrumente mit geteilten Tasten.)

# Irreguläre, wohltemperierte Stimmung (ab 1650)

Bekannteste Vertreterin: [Werckmeister III](#) (in heutiger Bezeichnung. Werckmeister: Correctes Temperament No. 1, 1691).  
Verblüffend einfache Konstruktion: 4 Quinten werden um  $1/4$  pythagoräisches Komma vermindert:

$$C:G:D:A \quad \text{und} \quad H:Fis.$$

Dadurch schließt sich der Quintenzirkel.

Die Stimmung von Bachs Instrumenten ist nicht bekannt.  
Werckmeister III ist eine gute Kandidatin. Weitere bekannte irreguläre Stimmungen stammen von [Kirnberger](#) (um 1770).

In der wohltemperierten Stimmung, die ja **nicht homogen** ist, haben die verschiedenen Tonarten **Charaktere**. Frei zitiert nach Schubart (1806):

- C-Dur: vollkommen rein, Unschuld, Kindlichkeit
- D-Dur: Triumph, Halleluja, Siegesjubel, Kriegsgeschrei
- a-moll: Tod, Grab, Verwesung, das Jüngste Gericht

Der Klavierstimmer konnte seinem Instrument eine „Färbung“ verleihen, indem er die „Temperatur“ individuell legte.

# Die gleichschwebende Stimmung

Charakteristik: gleichmäßige Aufteilung des pythagoräischen Kommas auf alle Halbtonschritte:

$$\text{Halbton} = \sqrt[12]{2} : 1$$

Gewinn: Homogenität des Klanges, alle Tonarten gleichberechtigt.

Verlust: Brillanz der Vorzugstonarten.

Ein früher Verfechter war J. Ph. Rameau (1730). Auch propagiert von Kirnberger (allerdings sehr komplizierte Stimmanleitung).  
Noch zu Beethovens Zeiten keineswegs verbreitet. Z. B. hat Chopin gewisse Tonarten gemieden, wie etwa d-moll.

Die immer weiter ausgreifende Chromatik der romantischen Musik hat dann aber die Ausbreitung der gleichschwebenden Stimmung vorangetrieben. Die Zwölftonmusik ist ohne sie unmöglich.

# Ein Vergleich

C	D	E	F	G	A	H	C
pyth							
rein							
mittel							
Werck							
gleich							

# Zur gleichschwebenden Stimmung

Die Quarten und Quinten werden in der gleichschwebenden Stimmung sehr gut getroffen, die Quinten wegen der Konstruktion und die Quarten als Komplementärintervall.

Schwachpunkt sind die großen Terzen, die nur wenig gegenüber der pythagoräischen Stimmung verbessert sind. Auch das ist klar: Syntonisches Komma und pythagoräisches Komma stimmen fast überein, und wir sparen pro Quintschritt bei der gleichschwebenden Stimmung  $1/12$  pythagoräisches Komma. es verbleibt ein Fehler von  $\approx 2/3$  syntonisches Komma.

Literatur: Dieser Vortrag stützt sich vor allem auf

D. Benson: *Music – a mathematical offering*. Cambridge University Press 2007.

*Lies keine Bücher über die Temperatur der Stimmung, sie enthalten nur Narreteien. Wieviele Rechnungen aufgemacht werden, soviele Systeme gibt es; wieviele Meinungen, soviel Eigensinn. Ohne ein langes Studium findet man sich unmöglich zurecht und verliert doch die Übersicht.*

Ignaz Bruder  
Orgel- und Spieluhrenmacher  
um 1829