JOURNAL OF ALGEBRA 53, 239–252 (1978)

Zur Einbettung von Moduln in zyklische Moduln und direkte Summen zyklischer Moduln

WINFRIED BRUNS

Institut für Mathematik der Technischen Universität Clausthal, BRD-3392 Clausthal-Zellerfeld, Erzstraße 1, Germany

Communicated by D. Buchsbaum

Received July 15, 1977

EINLEITUNG

Sei R ein kommutativer noetherscher Ring. Die Frage "Unter welchen Voraussetzungen läßt sich ein endlich erzeugter R-Modul in einen zyklischen R-Modul oder wenigstens in eine direkte Summe endlich vieler zyklischer R-Moduln einbetten?" ist vermutlich zu allgemein formuliert, als daß sie sinnvoll beantwortet werden kann. Spezialisierungen, denen wir in dieser Arbeit nachgehen werden, führen indessen auf interessante Ergebnisse.

Motivation und zugleich das erste uns bekannte Resultat in diesem Problemkreis (abgesehen natürlich vom Struktursatz für endlich erzeugte Moduln über Hauptidealringen) ist das folgende Theorem von M. Auslander [1, Theorem C]: R sei ein normaler Integritätsbereich, sämtliche Lokalisierungen von R nach maximalen Idealen seien Gorensteinringe mindestens der Dimension zwei; dann läßt sich jeder R-Modul endlicher Länge in einen zyklischen R-Modul einbetten. In [8] wurde diese Aussage für "Cohen-Macaulay-Ringe" anstelle von "Gorensteinringen" behauptet. Der angegebene Beweis enthält jedoch einen Fehler, so daß die erste Verallgemeinerung des Auslander'schen Satze sich wohl in [3, Satz 4] findet: Die Voraussetzung "normaler Integritätsbereich" ist überflüssig.

Ein endlich erzeugter R-Modul ist genau dann von endlicher Länge, wenn sein Annullatorideal $\operatorname{Ann}(M)$ endliche Kolänge in R besitzt. Dies und die speziellen Voraussetzungen des Auslander'schen Satzes implizieren, daß $\operatorname{Ann}(M)$ für die dort betrachteten Moduln mindestens den Grad 2 besitzt. (Der Grad eines Ideals $\mathfrak{a}$ bezeichnet die maximale Länge der in ihm enthaltenen R-Sequenzen.) Damit sind diejenigen Klassen von R-Moduln, denen unser Interesse in den ersten beiden Abschnitten gelten wird, genannt: die R-Moduln M mit $\operatorname{grad} \operatorname{Ann}(M) \geqslant 2$ und die R-Moduln endlicher Länge.

Sowohl die Klasse der Ideale $\mathfrak{a} \subset R$ mit $\operatorname{grad} \mathfrak{a} \geqslant 2$, als auch die Klasse der Ideale endlicher Kolänge besitzen folgende Eigenschaft: Mit einem Ideal $\mathfrak{a}$

0021-8693/78/0531-0239$02.00/0

481/53/1-16

gehört auch jedes Ideal $\mathfrak{b}$ mit $\mathrm{Ass}(R/\mathfrak{b}) = \mathrm{Ass}(R/\mathfrak{a})$ zu ihr. Sei $\mathfrak{A}$ eine Klasse von Idealen mit dieser Eigenschaft. Es wird sich zeigen, daß genau dann jeder endlich erzeugte R-Modul M mit $\mathrm{Ann}(M) \in \mathfrak{A}$ in einen zyklischen R-Modul eingebettet werden kann, wenn zu jedem Ideal $\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}$ Elemente $a, b \in R$ existieren die linear $\mathfrak{a}$-unabhängig sind. Wir nennen Elemente $a_1, \ldots, a_m \in R$ linear $\mathfrak{a}$-unabhängig, wenn eine Gleichung $b_1a_1 + \cdots + b_ma_m = 0$ nur mit Elementen $b_1, \ldots, b_m \in \mathfrak{a}$ erfüllt werden kann.

Eine in einem Ideal $\mathfrak{a}$ enthaltene R-Sequenz a, b ist linear $(Ra + Rb)$- und erst recht $\mathfrak{a}$-unabhängig. Es folgt unmittelbar: Ein endlich erzeugter R-Modul M mit grad $\mathrm{Ann}(M) \geqslant 2$ läßt sich einen zyklischen R-Modul einbetten. Es gilt indessen noch mehr, und dies kennzeichnet im wesentlichen die Situation grad $\mathrm{Ann}(M) \geqslant 2$: M ist dann sogar homomorphes Bild eines Ideals, das eine freie Auflösung der Länge $\leqslant 1$ besitzt.

Bereits in [1] wurde bewiesen, daß sich die Antwort auf die Frage, ob R die Einbettung eines jeden R-Moduls endlicher Länge in einen zyklischen Modul gestatte, an den Lokalisierungen von R nach seinen maximalen Idealen ablesen läßt. Die Minimalerzeugendenzahl von Idealen eines eindimensionalen lokalen Ringes ist beschränkt [5, 11]. Daraus folgt sehr schnell, daß die obige Frage für einen lokalen Ring zu verneinen ist, sobald er assoziierte Primideale einer Dimension $\leqslant 1$ enthält. Umgekehrt lassen sich beim Fehlen solcher Primideale in einem kompletten lokalen Ring mit maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ zu jeder ganzen Zahl $n \geqslant 1$ linear $\mathfrak{m}^n$-unabhängige Elemente a, b finden. Da die Antwort auf die obige Frage gegenüber Komplettierung invariant ist, folgt als zweites Hauptergebnis: Genau dann läßt sich jeder R-Modul endlicher Länge in einen zyklischen R-Modul einbetten, wenn für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von R die $\mathfrak{m}$-adische Komplettierung keine assoziierten Primideale einer Dimension $\leqslant 1$ besitzt.

Die für die Einbettbarkeit von Moduln endlicher Länge gewonnene hinreichende Bedingung läßt sich so formulieren, daß in ihr auf die endliche Länge kein Bezug mehr genommen wird: Sei $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R/\mathrm{Ann}(M))$, S die $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$-adische Komplettierung von $R_\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ ein zu S assoziiertes Primideal von S und $\mathfrak{q}'$ ein $\mathfrak{q}$ umfassendes Primideal mit $\dim S_{\mathfrak{q}'}/\mathfrak{q}S_{\mathfrak{q}'} \leqslant 1$; dann ist $\mathrm{Ann}(M) \not\subset \mathfrak{q}'$. Im dritten Abschnitt beweisen wir, daß jeder endlich erzeugte R-Modul, der diese "grad $\mathrm{Ann}(M) \geqslant 2$" abschwächende Bedingung erfüllt, in einen zyklischen R-Modul eingebettet werden kann.

Der letzte Abschnitt enthält die Charakterisierung derjenigen noetherschen Ringe, deren endlich erzeugte Moduln sich in direkte Summen endlich vieler zyklischer R-Moduln einbetten lassen: Es sind diejenigen Ringe R, deren Lokalisierungen nach Primidealen sämtlich approximativ Gorensteinsch im Sinne von [7] sind. Falls R ausgezeichnet ist, gestatten die Ergebnisse in [7] eine besonders einfache Beschreibung dieser Eigenschaft. Es genügt dann, daß die Lokalisierungen $R_\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R)$, Gorensteinringe sind, also z.B. daß R reduziert ist. Ob sich jeder R-Modul endlicher Länge in eine direkte Summe (endlich vieler) zyklischer R-Moduln einbetten läßt, hängt natürlich nur von den Lokalisierungen $R_{\mathfrak{m}}$ nach den maximalen Idealen $\mathfrak{m}$ ab. Hochster hat in [7] die approximativ Gorensteinschen lokalen Ringe mit Hilfe der assoziierten Primideale der Komplettierung beschrieben. Es ist bemerkenswert, daß sich die Einbettbarkeit von Moduln endlicher Länge sowohl in zyklische Moduln als auch in direkte Summen (endlich vieler) zyklischer Moduln an den assoziierten Primidealen der Ringe $\hat{R}_{\mathfrak{m}}$ ablesen läßt.

Die Ergebnisse des letzten Abschnitts wurden gemeinsam von Phillip Griffith und uns gefunden. Wir danken ihm für die Erlaubnis, diese Ergebnisse hier zu veröffentlichen. Udo Vetter danken wir für zahlreiche anregende Diskussionen, ohne die diese Arbeit nicht geschreiben worden wäre.

Einige Bezeichnungen und Begriffe: Mit $\mathrm{Ass}(M)$ bezeichnen wir die zu einem R-Modul assoziierten Primideale, mit $\mu(M)$ seine Minimalerzeugendenzahl. Sei $Q(R)$ der totale Quotientenring von R. Ist $M \otimes_R Q(R)$ ein freier $Q(R)$-Modul, so nennen wir die Anzahl der Elemente einer Basis dieses Moduls den Rang von M (vgl. [12, §6]). Eine Einbettung $f\colon N \to M$ heißt wesentlich, wenn für alle Untermoduln $M' \neq 0$ von M gilt: $f(N) \cap M' \neq 0$. Einen irreduziblen Untermodul M' kann man nicht in der Form $M' = M'' \cap M'''$ mit M' echt umfassenden Untermoduln M'', M''' darstellen. Von einem lokalen Ring verlangen wir, daß er noethersch ist und genau ein maximales Ideal besitzt. Unter der Dimension eines Ringes R oder eines Ideals $\mathfrak{a}$ von R, abgekürzt $\dim R$ bzw. $\dim \mathfrak{a}$, verstehen wir die Krulldimension von R bzw. $R/\mathfrak{a}$.

1. Moduln des Grades $\geqslant 2$

Der Kürze halber nennen wir einen R-Modul M zyklisch einbettbar, wenn M sich in einen zyklischen R-Modul einbetten läßt. Es lohnt sich, die Aussage, M sei zyklisch einbettbar, in verschiedener Weise umzuformulieren, weil diese neuen Formulierungen Hinweise auf unser späteres Vorgehen liefern. Darüber hinaus hält der folgende Satz zwei elementare, aber wichtige Eigenschaften zyklisch einbettbarer Moduln fest.

Satz 1. *R sei ein (beliebiger) kommutativer Ring, M ein endlich erzeugter R-Modul. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(a) *M ist zyklisch einbettbar.*

(b) *M ist homomorphes Bild eines Ideals.*

(c) *Für jeden Epimorphismus $f\colon R^n \to M$ gilt:* $\mathrm{Kern}\, f$ *enthält einen Untermodul U, für den R^n/U isomorph zu einem Ideal ist.*

(d) *Für jeden Epimorphismus $f\colon R^n \to M$ und jede Basis $e_1, \ldots, e_n$ von R^n existieren Elemente $a_1, \ldots, a_n \in R$ derart, daß für den durch die Zuordnung $e_i \to a_i$ definierten Epimorphismus $g\colon R^n \to \sum_{i=1}^n Ra_i$ gilt:* $\mathrm{Kern}\, g \subset \mathrm{Kern}\, f$.

Sei nun M zyklisch einbettbar. Dann gilt:

(e) *Jeder Untermodul und jedes homomorphe Bild von M ist zyklisch einbettbar.*

(f) *Es gibt eine wesentliche Einbettung von M in einen zyklischen R-Modul C. Insbesondere ist dann* $\operatorname{Ass}(M) = \operatorname{Ass}(C)$ *und, falls R noethersch ist, auch* $\operatorname{rad}\operatorname{Ann}(M) = \operatorname{rad}\operatorname{Ann}(C)$.

Beweis. Die Äquivalenz der Aussagen (a)–(d) ist trivial; gleiches gilt für (e).

Sei $g: M \to D$ eine Einbettung von M in einem zyklischen R-Modul D. Wir wählen ein maximales Element E der Menge $\{V: V \text{ Untermodul von } D \text{ und } V \cap g(M) = 0\}$. Die induzierte Einbettung $f: M \to C := D/E$ ist dann wesentlich. Aus der Definition des assoziierten Primideals folgt jetzt unmittelbar $\operatorname{Ass}(M) = \operatorname{Ass}(C)$. Falls R noethersch ist, stimmen die minimalen Elemente von $\operatorname{Ass}(M)$ mit den minimalen unter den $\operatorname{Ann}(M)$ umfassenden Primidealen überein. Also gilt dann $\operatorname{rad}\operatorname{Ann}(M) = \operatorname{rad}\operatorname{Ann}(C)$. ∎

Sei $\mathfrak{a}$ Ideal des Ringes R. Ein endlich erzeugter R-Modul M mit $\operatorname{Ann}(M) = \mathfrak{a}$ ist Restklassenmodul von $R^n/\mathfrak{a}R^n$ für genügend großes n. Nach Satz 1, (a) $\Leftrightarrow$ (d) und (e) folgt: Genau dann ist jeder endlich erzeugte R-Modul M mit $\operatorname{Ann}(M) = \mathfrak{a}$ zyklisch einbettbar, wenn zu jeder ganzen Zahl $n \geqslant 1$ linear $\mathfrak{a}$-unabhängige Elemente $a_1, \ldots, a_n \in R$ existieren. Sobald wir alle Moduln betrachten, deren Annullator einer gewissen Klasse $\mathfrak{A}$ von Idealen angehört, vereinfacht sich das Problem ganz erheblich:

LEMMA. *R sei ein (beliebiger) kommutativer Ring. Für die Menge $\mathfrak{A}$ von Idealen in R gelte: Ist $\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}$ und für das Ideal $\mathfrak{b}$ in R* $\operatorname{Ass}(R/\mathfrak{b}) = \operatorname{Ass}(R/\mathfrak{a})$, *so ist auch $\mathfrak{b} \in \mathfrak{A}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *Jeder endlich erzeugte R-Modul M mit* $\operatorname{Ann}(M) \in \mathfrak{A}$ *ist zyklisch einbettbar.*

(b) *Zu jedem Ideal $\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}$ und jedem n existieren linear $\mathfrak{a}$-unabhängige Elemente $a_1, \ldots, a_n \in R$.*

(c) *Für alle Ideale $\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}$ ist $R/\mathfrak{a} \oplus R/\mathfrak{a}$ zyklisch einbettbar.*

(d) *Zu jedem Ideal $\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}$ existieren linear $\mathfrak{a}$-unabhängige Elemente $a, b \in R$.*

Beweis. Die Äquivalenz von (a) und (b) haben wir bereits diskutiert. Ebenso ist klar, daß (a) die Aussage (c) impliziert und daß (c) und (d) gleichwertig sind.

Die Implikation (c) $\Rightarrow$ (a) beweisen wir durch Induktion über die Minimalerzeugendenzahl $\mu(M)$ des R-Moduls M; dabei ist der Induktionsanfang $\mu(M) \leqslant 1$ trivial. Sei also $n := \mu(M) > 1$ und $\mathfrak{a} := \operatorname{Ann}(M)$. M ist homomorphes Bild von $R^n/\mathfrak{a}R^n \simeq R/\mathfrak{a} \oplus R^{n-1}/\mathfrak{a}R^{n-1}$. Nach Induktionsvoraussetzung und Satz 1, (f) läßt sich $R^{n-1}/\mathfrak{a}R^{n-1}$ in einen zyklischen R-Modul $R/\mathfrak{b}$ mit $\operatorname{Ass}(R/\mathfrak{b}) = \operatorname{Ass}(R/\mathfrak{a})$, also $\mathfrak{b} \in \mathfrak{A}$, einbetten. Da $\mathfrak{b}$ den R-Modul $R^{n-1}/\mathfrak{a}R^{n-1}$ annulliert, muß $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$ sein. Deshalb ist $R/\mathfrak{a} \oplus R/\mathfrak{b}$ homomorphes Bild von

$R/\mathfrak{b} \oplus R/\mathfrak{b}$, und dieser Modul ist nach Voraussetzung (c) zyklisch einbettbar. Mehrfache Anwendung von Satz 1, (e) zeigt: Auch M ist zyklisch einbettbar. ▮

Eine in $\mathfrak{a}$ enthaltene R-Sequenz a, b ist linear $(Ra + Rb)$-unabhängig, erst recht linear $\mathfrak{a}$-unabhängig. Da für ein Ideal $\mathfrak{a}$ in einem noetherschen Ring $\operatorname{grad} \mathfrak{a} = \min\{\operatorname{grad} \mathfrak{p} : \mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(R/\mathfrak{a})\}$ gilt, folgt sofort das

KOROLLAR. *Sei R ein kommutativer noetherscher Ring und M ein endlich erzeugter R-Modul mit* $\operatorname{grad} \operatorname{Ann}(M) \geqslant 2$. *Dann ist M zyklisch einbettbar.*

Während das Lemma in den folgenden Abschnitten eine Schlüsselstellung einnehmen wird, hatte es in diesem Abschnitt nur die Aufgabe, einen besonders ·nfachen Beweis des Korollars zu liefern. Das Korollar folgt nämlich auch aus n ganz anders hergeleiteten

REM 1. *R sei ein kommutativer noetherscher Ring, $M \neq 0$ ein endlich er R-Modul mit* $\operatorname{grad} \operatorname{Ann}(M) \geqslant 2$. *$M$ besitze ein Erzeugendensystem aus n Elementen. Dann ist M homomorphes Bild eines Ideals $\mathfrak{a}$ mit folgenden Eigenschaften:*

(a) *$\mathfrak{a}$ besitzt eine freie Auflösung* $0 \to R^{n-1} \to R^n \to \mathfrak{a} \to 0$.

(b) *Entweder $\mathfrak{a} = R$ oder* $\operatorname{grad} \mathfrak{a} = 2$.

Beweis. Sei $f\colon R^n \to M$ ein Epimorphismus, $V := \operatorname{Kern} f$. Für alle Primideale $\mathfrak{p}$ mit $\operatorname{grad} \mathfrak{p}R_\mathfrak{p} \leqslant 1$ gilt $\mathfrak{p} \not\supset \operatorname{Ann}(M)$ wegen $\operatorname{grad} \operatorname{Ann}(M) \geqslant 2$. Dies impliziert $M_\mathfrak{p} = 0$, also $V_\mathfrak{p} = R_\mathfrak{p}{}^n$ für alle diese Primideale. Nach [3, Satz 1] enthält V einen freien Untermodul F, für den V/F isomorph zu einem Ideal ist. Da die projektive Dimension von R^n/F höchstens eins beträgt, können nur Primideale $\mathfrak{p}$ mit $\operatorname{grad} \mathfrak{p}R_\mathfrak{p} \leqslant 1$ zu R^n/F assoziiert sein, wegen $(R^n/F)_\mathfrak{p} \cong (V/F)_\mathfrak{p}$ unter diesen aber auch nur solche, die zum torsionsfreien Modul V/F assoziiert sind. Folglich ist auch R^n/F torsionsfrei.

Wie V/F hat auch R^n/F den Rang eins. Als torsionsfreier Modul des Ranges 1 ist R^n/F isomorph zu einem Ideal $\mathfrak{a}'$, das in unserem Fall die freie Auflösung

$$0 \to F \cong R^{n-1} \to R^n \to \mathfrak{a}' \to 0 \tag{*}$$

besitzt. Nach dem sogenannten Theorem von Hilbert–Burch (vgl. etwa [4, Theorem 0]) hat $\mathfrak{a}'$ die Form $a \cdot \mathfrak{a}$, wobei a ein Nichtnullteiler und $\mathfrak{a}$ das erste Fittingideal von $\mathfrak{a}'$ ist. Da (*) bei Lokalisieren nach Primidealen $\mathfrak{p}$ mit $\operatorname{grad} \mathfrak{p}R_\mathfrak{p} \leqslant 1$ aufspaltet, ist $\mathfrak{a} = R$ oder $\operatorname{grad} \mathfrak{a} \geqslant 2$. Nach der bekannten Abschätzung für den Grad von Determinantenidealen [6, Theorem 3] muß bei $\mathfrak{a} \neq R$ aber auch $\operatorname{grad} \mathfrak{a} \leqslant 2$ gelten. Der Epimorphismus $f\colon R^n \to M$ induziert wegen $F \subset \operatorname{Kern} f$ einen Epimorphismus von $\mathfrak{a} \cong R^n/F$ auf M. ▮

ANMERKUNG 1. Theorem 1 besitzt eine simple Umkehrung. Sie zeigt, daß die Aussage von Theorem 1 die Situation "$\operatorname{grad} \operatorname{Ann}(M) \geqslant 2$" im wesentlichen kennzeichnet: *Der R-Modul M sei homomorphes Bild eines Ideals* $\mathfrak{a}$ *der projektiven Dimension* $\leqslant 1$, $\mathfrak{p} \supset \operatorname{Ann}(M)$ *ein Primideal, für das* $M_{\mathfrak{p}}$ *kein zyklischer* $R_{\mathfrak{p}}$*-Modul ist*; *dann ist* $\operatorname{grad} \mathfrak{p} \geqslant 2$. Beweis: Wir nehmen an, es sei $\operatorname{grad} \mathfrak{p} \leqslant 1$. Nach eventuellem Übergang zu einem $\mathfrak{p}$ umfassenden Primideal dürfen wir auch noch $\operatorname{grad} \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}} \leqslant 1$ annehmen. In diesem Fall sind aber alle in $R_{\mathfrak{p}}$ enthaltenen $R_{\mathfrak{p}}$-Moduln endlicher projektiver Dimension, insbesondere auch $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$, isomorph zu $R_{\mathfrak{p}}$. Widerspruch!

ANMERKUNG 2. Theorem 1 läßt sich zu folgender Aussage verallgemeinern: *$M \neq 0$ sei ein von n Elementen erzeugter R-Modul mit* $\operatorname{grad} \operatorname{Ann}(M) \geqslant m \geqslant 1$. *Dann ist M homomorphes Bild eines R-Moduls N mit folgenden Eigenschaften*:

(a) *N ist ein $(m-1)$-ter Syzygienmodul, d.h. es existiert eine exakte Sequenz* $0 \to N \to F_1 \to \cdots \to F_{m-1}$ *mit endlich erzeugten freien R-Moduln* F_i.

(b) $\operatorname{rang} N \leqslant m - 1$.

(c) *Im Fall* $\operatorname{rang} N < m - 1$ *ist N freier R-Modul*; *andernfalls besitzt N eine freie Auflösung* $0 \to R^{n-m+1} \to R^n \to N \to 0$.

Beweis. Im Fall $m > n + 1$ existiert ein Epimorphismus $R^{m-2} \to M$, und wir können $N = R^{m-2}$ wählen. Im anderen Fall wird der Beweis im wesentlichen wie der von Theorem 1 bzw. [3, Satz 1] geführt. Im Kern V eines Epimorphismus $R^n \to M$ findet man mit Hilfe von [2, Satz 1] sukzessiv Elemente $x_1, \ldots, x_{n-m+1}$, die für alle Primideale $\mathfrak{p}$ mit $\operatorname{grad} \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}} \leqslant m - 1$ einen freien direkten Summanden des Ranges $n - m + 1$ von $R_{\mathfrak{p}}{}^n$ erzeugen. Wie in [2, Satz 2] bewiesen, besitzt dann $N := R^n / \sum_{t=1}^{n-m+1} Rx_t$ die behaupteten Eigenschaften. ▮

2. MODULN ENDLICHER LÄNGE

In diesem Abschnitt charakterisieren wir diejenigen noetherschen kommutativen Ringe R, deren Moduln endlicher Länge sämtlich in zyklische Moduln eingebettet werden können. Ein endlich erzeugter R-Modul M besitzt genau dann endliche Länge, wenn $\operatorname{Ass}(M)$ nur aus maximalen Idealen besteht. Daraus folgt mit Theorem 1: Falls alle maximalen Ideale von R mindestens den Grad zwei haben, besitzt R die fragliche Eigenschaft. Wir werden aber sehen, daß diese Bedingung nicht notwendig ist. Wegen Satz 1, (f) bedeutet es keine Verschärfung zu fragen, wann sich jeder R-Modul endlicher Länge in einen zyklischen R-Modul endlicher Länge wesentlich einbetten läßt.

Wir reduzieren das Problem zunächst auf den lokalen Fall. Gemäß dem Beweis der Äquivalenz von Theorem C und Theorem C′ in [1] gilt:

SATZ 2. *R sei ein kommutativer noetherscher Ring,* $\mathfrak{M}$ *eine Menge von maximalen Idealen von R. Folgende Aussagen sind äquivalent*:

(a) *Jeder R-Modul M endlicher Länge mit* $\mathrm{Ass}(M) \subset \mathfrak{M}$ *ist zyklisch einbettbar.*

(b) *Für alle* $\mathfrak{m} \in \mathfrak{M}$ *ist jeder* $R_{\mathfrak{m}}$*-Modul endlicher Länge zyklisch einbettbar.*

Beweis. Die Implikation (a) $\Rightarrow$ (b) folgt unmittelbar daraus, daß jeder $R_{\mathfrak{m}}$-Modul endlicher Länge auch ein R-Modul der gleichen endlichen Länge ist und $\mathfrak{m}$ das einzige zu ihm als R-Modul assoziierte Primideal ist. Die Implikation (b) $\Rightarrow$ (a) wurde in [1, pp. 366, 367] mit Hilfe des Chinesischen Restsatzes bewiesen. (Beim Heranziehen von [1] beachte man, daß endliche Länge des zyklischen Moduls und Wesentlichkeit der Einbettung unwesentlich sind.) ∎

Es gibt R-Moduln endlicher Länge mit beliebig großer Minimalerzeugendenzahl. Daher läßt sich nicht jeder R-Modul endlicher Länge in einen zyklischen R-Modul einbetten, wenn die Minimalerzeugendenzahl der Ideale in R beschränkt ist. Nach einem Satz von I. S. Cohen [5, Theorem 9] trifft dies auf lokale eindimensionale Integritätsbereiche zu. (Für Verallgemeinerungen und eine Abschätzung der Erzeugendenzahl vgl. man [11].) Das Cohen'sche Resultat ist das wesentliche Argument im Beweis von

Satz 3. $(R, \mathfrak{m})$ *sei ein lokaler Ring und besitze ein assoziiertes Primideal* $\mathfrak{p}$ *mit* $\dim R/\mathfrak{p} \leqslant 1$. *Dann gibt es einen nicht zyklisch einbettbaren R-Modul endlicher Länge.*

Beweis. Sei $x \in R$, $x \neq 0$ mit $x\mathfrak{p} = 0$. Nach dem genannten Satz von Cohen ist die Minimalerzeugendenzahl von Idealen in $R/\mathfrak{p}$ beschränkt, etwa durch die Zahl n. Seien $a_1, \ldots, a_{n+1}$ Elemente von R, $\pi\colon R \to R/\mathfrak{p}$ bezeichne den natürlichen Epimorphismus. Nach einer eventuellen Umbenennung dürfen wir annehmen, $\pi(a_1)$ liege in dem von $\pi(a_2), \ldots, \pi(a_{n+1})$ erzeugten Ideal. Es gibt also Elemente $b_2, \ldots, b_{m+1} \in R$ derart, daß

$$\pi(a_1) + \pi(b_2)\,\pi(a_2) + \cdots + \pi(b_{n+1})\,\pi(a_{n+1}) = 0$$

oder äquivalent

$$a_1 + b_2 a_2 + \cdots + b_{n+1} a_{n+1} \in \mathfrak{p}$$

ist. Multiplikation mit x führt auf

$$x a_1 + x b_2 a_2 + \cdots + x b_{n+1} a_{n+1} = 0.$$

Wegen $x \neq 0$ existiert eine Zahl m mit $x \notin \mathfrak{m}^m$. Da es keine $n+1$ linear $\mathfrak{m}^m$-unabhängigen Elemente in R gibt, ist $(R/\mathfrak{m}^m)^{n+1}$ nicht zyklisch einbettbar. ∎

Eines der Beispiele von Nagata [10, pp. 204, 205] zeigt, daß die $\mathfrak{m}$-adische Komplettierung von R auch dann eindimensionale assoziierte Primideale enthalten kann, wenn dies auf R selbst nicht zutrifft. Uns bleibt nur noch die

Hoffnung, die Umkehrung von Satz 3 im kompletten Fall beweisen zu können, denn es gilt:

SATZ 4. *$(R, \mathfrak{m})$ sei ein lokaler Ring, $(\hat{R}, \hat{\mathfrak{m}})$ seine $\mathfrak{m}$-adische Komplettierung. Genau dann ist jeder R-Modul endlicher Länge zyklisch einbettbar, wenn jeder $\hat{R}$-Modul endlicher Länge zyklisch einbettbar ist.*

Beweis. Zum Beweis der Implikation "$\Rightarrow$" genügt es zu bemerken, daß ein $\hat{R}$-Modul M' endlicher Länge auch R-Modul der gleichen endlichen Länge und insbesondere komplett ist; damit gilt dann $M' \otimes_R \hat{R} = M'$.

Sei umgekehrt M ein R-Modul endlicher Länge. Dann läßt sich $M \otimes_R \hat{R} = M$ in einen zyklischen $\hat{R}$-Modul, etwa $\hat{R}/\mathfrak{a}$ einbetten. Wegen Satz 1, (d) dürfen wir annehmen, $\mathfrak{a}$ sei $\hat{\mathfrak{m}}$-primär. Für solche Ideale $\mathfrak{a}$ gilt bekanntlich $\mathfrak{a} = \hat{R}(\mathfrak{a} \cap R)$ und $\hat{R}/\mathfrak{a} \cong R/(\mathfrak{a} \cap R)$. ▌

Es ist zweckmäßig, an dieser Stelle auf das Lemma zurückzukommen. Es besagt speziell für lokale Ringe: Genau dann ist jeder R-Modul endlicher Länge zyklisch einbettbar, wenn es zu jeder ganzen Zahl $n \geqslant 1$ linear $\mathfrak{m}^n$-unabhängige Elemente a_n, $b_n \in R$ gibt. Im Fall $\operatorname{grad} \mathfrak{m} \geqslant 2$ können wir eine R-Sequenz a, b und $a_n := a^n$, $b_n := b^n$ wählen. Im allgemeinen Fall $\dim R \geqslant 2$ —nur dieser ist ja nach Satz 3 noch von Interesse—können wir es mit Elementen a, b versuchen, die einem Parametersystem entnommen sind. Dann gibt es immerhin zwei Primideale $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ in R mit $a \in \mathfrak{p} - \mathfrak{q}$ und $b \in \mathfrak{q} - \mathfrak{p}$.

Für die Elemente $x, y \in R$ gelte $xa^n + yb^n = 0$. Wegen $a \notin \mathfrak{q}$ muß x in der n-ten symbolischen Potenz $\mathfrak{q}^{(n)}$ von $\mathfrak{q}$, entsprechend y in $\mathfrak{p}^{(n)}$ liegen. Wir setzen

$$\eta(n) := \max\{m: \mathfrak{p}^{(n)} \subset \mathfrak{m}^m\}$$

und

$$\theta(n) := \max\{m: \mathfrak{q}^{(n)} \subset \mathfrak{m}^m\}$$

Wenn η und θ unbeschränkt sind, können wir zu jeder ganzen Zahl $m \geqslant 1$ eine Zahl n so finden, daß a^n, b^n linear $\mathfrak{m}^m$-unabhängig sind.

Notwendig für die Unbeschränktheit von η (und entsprechendes gilt für θ) ist sicherlich die Gültigkeit der Gleichung

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{p}^{(n)} = 0. \qquad (*)$$

Wenn aber R komplett ist, ist (*) nach einem Satz von Chevalley [10, p. 103, (30.1)] auch hinreichend. Das Ideal $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{p}^{(n)}$ ist gerade der Kern des natürlichen Homomorphismus $R \to R_\mathfrak{p}$. Besitzt R nur ein assoziiertes Primideal, so ist dies notwendig das einzige minimale Primideal von R. Jedes Primideal $\mathfrak{p}$ enthält dann sämtliche Nullteiler: $R \to R_\mathfrak{p}$ ist injektiv.

Wir fassen zusammen:

SATZ 5. $(R, \mathfrak{m})$ *sie ein kompletter lokaler Ring mit genau einem assoziierten Primideal. Es gelte* $\dim R \geqslant 2$, *und die Elemente* a, b *seien einem Parametersystem von* R *entnommen. Dann gibt es eine unbeschränkte, nicht fallende Funktion* ζ *derart, daß für alle ganzen Zahlen* $n \geqslant 1$ *die Elemente* a^n, b^n *linear* $\mathfrak{m}^{\zeta(n)}$-*unabhängig sind.*

Der beim Beweis von Satz 5 verwendete Satz von Chevalley wird uns auch helfen, die Primärzerlegung zu überwinden, mit deren Hilfe wir den allgemeinen Fall auf Satz 5 zurückführen werden.

SATZ 6. $(R, \mathfrak{m})$ *sei ein kompletter lokaler Ring. Für alle Primideale* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R)$ *besitze der Restklassenring* $R/\mathfrak{p}$ *mindestens die Dimension* 2. *Dann existieren zu jeder ganzen Zahl* $n \geqslant 1$ *linear* $\mathfrak{m}^n$-*unabhängige Elemente* a_n, $b_n \in R$.

Beweis. Sei $0 = \mathfrak{r}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{r}_r$ eine reduzierte Primärzerlegung des Nullideals von R, $\mathfrak{p}_i$ das Radikal von $\mathfrak{r}_i$, $i = 1,\dots, r$. Dann ist $\mathrm{Ass}(R) = \{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r\}$. Wir bezeichnen den natürlichen Epimorphismus $R \to R_i := R/\mathfrak{r}_i$ durch φ_i und das maximale Ideal von R_i mit $\mathfrak{m}_i$.

Für jeden der Ringe R_i gilt $\mathrm{Ass}(R_i) = \{\mathfrak{p}_i/\mathfrak{r}_i\}$. Daher erfüllen diese Ringe die Voraussetzungen von Satz 5. Es bereitet keine Mühe, Elemente $a, b \in R$ derart zu finden, daß $\{\varphi_i(a), \varphi_i(b)\}$ für alle $i = 1,\dots, r$ zweielementige Teilmenge eines Parametersystems von R_i ist. Nach Satz 5 gibt es unbeschränkte, nicht fallende Funktionen ζ_i, so daß $\varphi_i(a)^n$, $\varphi_i(b)^n$ linear $\mathfrak{m}_i^{\zeta_i(n)}$-unabhängig sind, $n \geqslant 1$, $i = 1,\dots, r$.

Sei

$$\eta(n) := \max\{m\colon xa^n + yb^n = 0 \text{ impliziert } x, y \in \mathfrak{m}^m\}.$$

Zu zeigen ist: η ist unbeschränkt. Bei $xa^n + yb^n = 0$ folgt $\varphi_i(x)\,\varphi_i(a)^n + \varphi_i(y)\,\varphi_i(b)^n = 0$, also $\varphi_i(x), \varphi_i(y) \in \mathfrak{m}_i^{\zeta_i(n)}$ und somit insgesamt

$$x, y \in \mathfrak{n}_n := \bigcap_{i=1}^{r} (\mathfrak{m}^{\zeta_i(n)} + \mathfrak{r}_i).$$

Wir setzen

$$\theta(n) := \max\{m\colon \mathfrak{n}_n \subset \mathfrak{m}^m\}$$

Es gilt für alle $n \geqslant 1$: $\theta(n) \leqslant \eta(n)$. Da die Funktionen ζ_i nicht fallen, bilden die Ideale $\mathfrak{n}_n$ eine absteigende Folge. Da die Funktionen ζ_i unbeschränkt sind, hat man $\bigcap_{n\geqslant 1} (\mathfrak{m}^{\zeta_i(n)} + \mathfrak{r}_i) = \mathfrak{r}_i$, und $\bigcap_{i=1}^{r} \mathfrak{r}_i = 0$ gilt ohnehin. Es folgt:

$$\bigcap_{n\geqslant 1} \mathfrak{n}_n = \bigcap_{n\geqslant 1} \bigcap_{i=1}^{r} (\mathfrak{m}^{\zeta_i(n)} + \mathfrak{r}_i)$$

$$= \bigcap_{i=1}^{r} \bigcap_{n\geqslant 1} (\mathfrak{m}^{\zeta_i(n)} + \mathfrak{r}_i) = \bigcap_{i=1}^{r} \mathfrak{r}_i = 0.$$

Der Satz von Chevalley zeigt: θ ist unbeschränkt. ∎

Jetzt haben wir alle wesentlichen Argumente für den Beweis unseres zweiten Hauptergebnisses zusammengetragen.

THEOREM 2. *Folgende Aussagen über einen kommutativen noetherschen Ring R sind äquivalent*:

(a) *Jeder R-Modul endlicher Länge ist zyklisch einbettbar.*

(b) *Zu jedem maximalen Ideal* $\mathfrak{m}$ *von R und jeder Zahl* $n \geqslant 1$ *existieren linear* $\mathfrak{m}^n$*-unabhängige Elemente* $a, b \in R$.

(c) *Für jedes maximale Ideal* $\mathfrak{m}$ *von R gilt: die* $\mathfrak{m}$*-adische Komplettierung* $\hat{R}_\mathfrak{m}$ *von R besitzt keine assoziierten Primideale* $\mathfrak{p}$ *mit* $\dim \hat{R}_\mathfrak{m}/\mathfrak{p} \leqslant 1$.

Beweis. Die Implikation (a) $\Rightarrow$ (b) ist eine Abschwächung des trivialen Teils des Lemmas. Gilt (b), so läßt sich jeder der R-Moduln $R/\mathfrak{m}^n \oplus R/\mathfrak{m}^n$ zyklisch einbetten. Nach Tensorieren mit $\hat{R}_\mathfrak{m}$ folgt: $\hat{R}_\mathfrak{m}/(\mathfrak{m}\hat{R}_\mathfrak{m})^n \oplus \hat{R}_\mathfrak{m}/(\mathfrak{m}\hat{R}_\mathfrak{m})^n$ ist zyklisch einbettbarer $\hat{R}_\mathfrak{m}$-Modul. Der nichttriviale Teil des Lemmas impliziert: Jeder $\hat{R}_\mathfrak{m}$-Modul endlicher Länge ist zyklisch einbettbar. Nach Satz 4 und Satz 2 folgt aus dieser Aussage einerseits Teil (a), andererseits ist sie gemäß Lemma, Satz 3 und Satz 6 zu (c) äquivalent. ▮

Wir notieren noch zwei Folgerungen zu Theorem 2:

KOROLLAR 1. $(R, \mathfrak{m})$ *sei ein kompletter lokaler Ring, der lokale Ring* $(S, \mathfrak{n})$ *sei eine flache lokale Erweiterung von R. Besitzt R keine assoziierten Primideale einer Dimension* $\leqslant 1$, *so gilt dies auch für S.*

Beweis. Da die Erweiterung von R zu S lokal ist, $S/\mathfrak{n}^n$ Restklassenmodul von $(R/\mathfrak{m}^n) \otimes_R S$. Aus der Flachheit folgt, daß $((R/\mathfrak{m}^n) \otimes_R S) \oplus ((R/\mathfrak{m}^n) \otimes_R S)$ zyklisch einbettbarer S-Modul ist, falls sich $R/\mathfrak{m}^n \oplus R/\mathfrak{m}^n$ in einen zyklischen R-Modul einbetten läßt. ▮

In der folgenden Definition und dem sich anschließenden Korollar bezeichnet R wieder einen beliebigen kommutativen noetherschen Ring.

DEFINITION. Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal in R und S die $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$-adische Komplettierung von $R_\mathfrak{p}$. Dann setzen wir

$$\mathrm{d}^*(\mathfrak{p}) := \min\{\dim S/\mathfrak{q} \colon \mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}(S)\}$$

Stets gilt $\operatorname{grad} \mathfrak{p}R_\mathfrak{p} \leqslant \mathrm{d}^*(\mathfrak{p}) \leqslant \dim R_\mathfrak{p}$.

KOROLLAR 2. *Für das Primideal* $\mathfrak{p}$ *in R sei* $\mathrm{d}^*(\mathfrak{p}) > 1$. *Ist* $\mathfrak{p}$ *in einem Primideal* $\mathfrak{q}$ *mit* $\mathrm{d}^*(\mathfrak{q}) \leqslant 1$ *enthalten, so ist* $\mathfrak{p}^n$ *nur für endlich viele n ein Primärideal. Es gibt dann sogar eine ganze Zahl m* > 1 *mit* $\mathfrak{p}^{(n)} \not\subset \mathfrak{q}^{(m)}$ *für alle n* $\geqslant 1$.

Beweis. Wegen $d^*(\mathfrak{p}) > 1$ können wir nach Theorem 2 zu jeder ganzen Zahl $n \geqslant 1$ linear $(\mathfrak{p}R_\mathfrak{p})^n$-unabhängige Elemente $a_n, b_n \in R_\mathfrak{p}$ finden. Nach Multiplikation mit einer geeigneten Einheit von $R_\mathfrak{p}$ dürfen wir $a_n, b_n \in R$ annehmen. Dann sind a_n, b_n linear $\mathfrak{p}^{(n)}$-unabhängig. Wäre die letzte Behauptung falsch, existieren zu jedem $m \geqslant 1$ zwei linear $\mathfrak{q}^{(m)}$-unabhängige Elemente, nämlich a_n, b_n falls $\mathfrak{p}^{(n)} \subset \mathfrak{q}^{(m)}$. Dann müßte aber auch $d^*(\mathfrak{q}) > 1$ sein. ▌

3. Ein allgemeines Kriterium für zyklische Einbettbarkeit

Aus den Sätzen des vorangegangenen Abschnitts ergibt sich die folgende hinreichende Bedingung für die zyklische Einbettbarkeit eines R-Moduls M endlicher Länge:

(H) Sei $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R/\mathrm{Ann}(M))$, S die $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$-adische Komplettierung von $R_\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ ein in S zu S assoziiertes Primideal und $\mathfrak{q}'$ ein $\mathfrak{q}$ umfassendes Primideal mit $\dim S_{\mathfrak{q}'}/\mathfrak{q}S_{\mathfrak{q}'} \leqslant 1$. Dann ist $\mathrm{Ann}(M)S \not\subset \mathfrak{q}'$.

Diese Bedingung nimmt keinen Bezug mehr auf die endliche Länge von M. In der Tat erweist sie sich für beliebige endlich erzeugte R-Moduln als hinreichend. Man beachte, daß (H) bei $\mathrm{grad}\,\mathrm{Ann}(M) \geqslant 2$ erfüllt ist.

Theorem 3. *R sei ein kommutativer noetherscher Ring und M ein endlich erzeugter R-Modul, der die Bedingung* (H) *erfüllt. Dann ist M zyklisch einbettbar.*

Beweis. Wir bilden $\mathfrak{A} := \{\mathfrak{a}$ Ideal in $R : M := R/\mathfrak{a}$ erfüllt (H)$\}$. Sei $\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}$ und $\mathfrak{b}$ ein Ideal in R mit $\mathrm{Ass}(R/\mathfrak{b}) = \mathrm{Ass}(R/\mathfrak{a})$. Wir wählen ein Primideal $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R/\mathfrak{b})$ und $S, \mathfrak{q}, \mathfrak{q}'$ entsprechend (H). Bezeichne $\varphi: R \to S$ den natürlichen Homomorphismus. Da $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R/\mathfrak{a})$, existiert ein $a \in \mathfrak{a}$ mit $\varphi(a) \notin \mathfrak{q}'$. Für genügend großes n liegt a^n in $\mathfrak{b}$, aber $\varphi(a^n)$ nie in $\mathfrak{q}'$. Also erfüllt auch $R/\mathfrak{b}$ die Bedingung (H) und $\mathfrak{A}$ die Voraussetzung des Lemmas. Es genügt somit, den folgenden Satz zu beweisen:

Satz 7. *R sei ein kommutativer noetherscher Ring und $\mathfrak{a}$ ein Ideal in R, für das $R/\mathfrak{a}$ der Bedingung* (H) *genügt. Dann gibt es linear $\mathfrak{a}$-unabhängige Elemente $a, b \in R$.*

Beweis. Sei $\mathfrak{a} := \mathfrak{r}_i \cap \cdots \cap \mathfrak{r}_r$ eine reduzierte Primärzerlegung von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{p}_i := \mathrm{rad}\,\mathfrak{r}_i$. Als $\mathfrak{p}_i$-primäres Ideal umfaßt $\mathfrak{r}_i$ eine symbolische Potenz von $\mathfrak{p}_i$, etwa $\mathfrak{p}_i^{(n_i)}$. Bezeichne S_i die $\mathfrak{p}_iR_{\mathfrak{p}_i}$-adische Komplettierung von $R_{\mathfrak{p}_i}$, $\mathfrak{n}_i$ ihr maximales Ideal und $\varphi_i: R \to S_i$ den natürlichen Homomorphismus. Weiterhin benötigen wir zu jedem i eine reduzierte Primärzerlegung $\mathfrak{r}_{i1} \cap \cdots \cap \mathfrak{r}_{ik_i}$ des Nullideals von S_i und die natürlichen Homomorphismen $\varphi_{ij}: R \to R_{ij} := S_i/\mathfrak{r}_{ij}$.

Die Bedingung (H) sichert, daß wir mit den üblichen Allgemeine-Lage-Argumenten Elemente $c, d \in R$ derart finden können, daß $\{\varphi_{ij}(c), \varphi_{ij}(d)\}$ für alle $i = 1,\ldots, r$ und $j = 1,\ldots, k_i$ zweielementige Teilmenge eines Parametersystems von S_{ij} ist. Die Überlegungen im Beweis von Satz 6 zeigen: Für genügend großes

n sind $\varphi_i(c^n)$, $\varphi_i(d^n)$ linear $\mathfrak{n}_i^{n_i}$-unabhängig. Urbild von $\mathfrak{n}_i^{n_i}$ unter φ_i ist gerade $\mathfrak{p}_i^{(n_i)}$. Daher sind c^n, d^n linear $\mathfrak{p}_i^{(n_i)}$-unabhängig. Wegen $\mathfrak{a} \supset \mathfrak{p}_1^{(n_1)} \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_r^{(n_r)}$ können wir $a := c^n$, $b := d^n$ wählen. ▮

4. Einbettung von Moduln in direkte Summen zyklischer Moduln

In diesem Abschnitt charakterisieren wir diejenigen kommutativen noetherschen Ringe R, über denen sich jeder endlich erzeugte Modul in eine direkte Summe endlich vieler zyklischer Moduln einbetten läßt. Dabei spielt die Eigenschaft "approximativ Gorensteinsch" eine entscheidende Rolle. Sie wird in [7] folgendermaßen definiert: R heißt approximativ Gorensteinsch, wenn jede Potenz $\mathfrak{m}^n$ eines jeden maximalen Ideals $\mathfrak{m}$ ein Ideal $\mathfrak{a}$ enthält, für das $R/\mathfrak{a}$ Gorensteinring ist. Es ist leicht einzusehen, daß eine Lokalisierung $R_\mathfrak{p}$ genau dann approximativ Gorensteinsch ist, wenn jedes $\mathfrak{p}$-primäre Ideal ein irreduzibles $\mathfrak{p}$-primäres Ideal enthält.

Theorem 4. *R sei ein kommutativer noetherscher Ring. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *Jeder endlich erzeugte R-Modul läßt sich in eine direkte Summe endlich vieler zyklischer R-Moduln einbetten.*

(b) *Alle Lokalisierungen $R_\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$, sind approximativ Gorensteinsch.* *Ist R ausgezeichnet, so ist jede der Aussagen* (a) *und* (b) *äquivalent zu:*

(c) *$R_\mathfrak{p}$ ist Gorensteinring für alle Primideale* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(R)$.

Beweis. Ein approximativ Gorensteinscher lokaler Ring, dessen maximales Ideal zu ihm assoziiert ist, ist nach [7] stets ein (nulldimensionaler) Gorensteinring. Daher impliziert (b) stets (c). Umgekehrt wird in [7] bewiesen, daß ein ausgezeichneter Ring mit Eigenschaft (c) approximativ Gorensteinsch ist. Sowohl Eigenschaft (c) als auch die Eigenschaft, ausgezeichnet zu sein, übertragen sich von R auf alle Lokalisierungen. Somit folgt für ausgezeichnete Ringe (b) aus (c).

Zum Beweis der Implikation (b) $\Rightarrow$ (a) betten wir einen gegebenen R-Modul M zunächst in die direkte Summe seiner Primärkomponenten ein. Danach können wir annehmen, M sei ein $\mathfrak{p}$-primärer Modul, $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$. Dann ist $\operatorname{Ann}(M)$ ein $\mathfrak{p}$-primäres Ideal und $\operatorname{Ass}(M) = \{\mathfrak{p}\}$. Gemäß (b) enthält $\operatorname{Ann}(M)$ ein $\mathfrak{p}$-primäres irreduzibles Ideal $\mathfrak{a}$. Sei $S := R/\mathfrak{a}$, $\mathfrak{q} := \mathfrak{p}/\mathfrak{a}$. Dann ist $\operatorname{Ass}(S) = \{\mathfrak{q}\}$ und $S_\mathfrak{q}$ ein Gorensteinring. Ferner ist $\mathfrak{q}$ das einzige zu M als S-Modul assoziierte Primideal. M ist also ein torsionsfreier S-Modul, nach [13, Theorem (A.1)] sogar ein torsionsloser S-Modul, d.h. M läßt sich in einen endlich erzeugten freien S-Modul einbetten. Diese Einbettung ist in natürlicher Weise eine Einbettung des R-Moduls M in eine direkte Summe zyklischer R-Moduln.

Jeder endlich erzeugte $R_{\mathfrak{p}}$-Modul N läßt sich in der Form $N = M \otimes_R R_{\mathfrak{p}}$ mit einem endlich erzeugten R-Modul M darstellen. (Falls N endliche Länge hat, kann M $\mathfrak{p}$-primär gewählt werden.) Wir können also beim Beweis der Implikation (a) $\Rightarrow$ (b) annehmen, daß R ein lokaler Ring und $\mathfrak{p}$ sein maximales Ideal ist. Wir wählen M als injektive Hülle des $R/\mathfrak{p}^n$-Moduls $R/\mathfrak{p}$. M hat gemäß [9, Proposition 2.2, Theorem 3.7 und Theorem 3.11] folgende Eigenschaften: M besitzt endliche Länge, $\mathrm{Ann}(M) = \mathfrak{p}^n$, und der Nulluntermodul von M ist irreduzibel. Eine Einbettung von M in eine direkte Summe (endlich vieler) zyklischer Moduln induziert also eine Einbettung in einen der Summanden, etwa $R/\mathfrak{a}$. Wir dürfen annehmen, daß $R/\mathfrak{a}$ wesentliche Erweiterung von M ist. Nun ist leicht zu sehen, daß $\mathfrak{a}$ ein in $\mathfrak{p}^n$ enthaltenes irreduzibles $\mathfrak{p}$-primäres Ideal ist. ∎

Der Beweis von Theorem 4 zeigt, daß wir Aussage (a) durch Weglassen von "endlich vieler" noch abschwächen können. Er zeigt weiterhin, daß die Aussage dieses Theorems sich auch relativ zu einem R-Modul M bzw. zu einem Primideal $\mathfrak{p}$ formulieren läßt: $R_{\mathfrak{q}}$ sei approximativ Gorensteinsch für alle Primideale $\mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}(M)$; dann läßt sich M in eine direkte Summe endlich vieler zyklischer R-Moduln einbetten. Und: Alle endlich erzeugten $\mathfrak{p}$-primären Moduln seien in direkte Summen zyklischer R-Moduln einbettbar; dann ist $R_{\mathfrak{p}}$ approximativ Gorensteinsch. Beschränken wir uns etwa auf R-Moduln endlicher Länge, so ergibt sich die Äquivalenz zwischen den Aussagen (a) und (b) des folgenden Theorems. Die Äquivalenz zwischen (b) und (c) ist Hochster's Charakterisierung von "approximativ Gorensteinsch."

THEOREM 5. *Für einen kommutativen noetherschen Ring R sind folgende Aussagen gleichwertig*:

(a) *Jeder R-Modul endlicher Länge läßt sich in eine direkte Summe zyklischer R-Moduln einbetten.*

(b) *R ist approximativ Gorensteinsch.*

(c) *Für jedes maximale Ideal* $\mathfrak{m}$ *von R gilt*: *Im Fall* $\dim \hat{R}_{\mathfrak{m}} = 0$ *ist* $\hat{R}_{\mathfrak{m}}$ *ein Gorensteinring*; *andernfalls ist* $\hat{\mathfrak{m}}\hat{R}_{\mathfrak{m}}$ *nicht zu* $\hat{R}_{\mathfrak{m}}$ *assoziiert, und für jedes Primideal* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(\hat{R}_{\mathfrak{m}})$ *mit* $\dim \hat{R}_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{p} = 1$ *läßt sich* $\hat{R}_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{p} \oplus \hat{R}_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{p}$ *nicht in* $\hat{R}_{\mathfrak{m}}$ *einbetten.*

Die Analogie zwischen den Theoremen 2 und 5 ist bemerkenswert.

LITERATUR

1. M. AUSLANDER, Remarks on a theorem of Bourbaki, *Nagoya Math. J.* **27** (1966), 361–369.
2. W. BRUNS, "Jede" endliche freie Auflösung ist freie Auflösung eines von drei Elementen erzeugten Ideals, *J. Algebra* **39** (1976), 429–439.

3. W. Bruns und U. Vetter, Die Verallgemeinerung eines Satzes von Bourbaki und einige Anwendungen, *Manuscripta Math.* **17** (1975), 317–325.
4. D. A. Buchsbaum und D. Eisenbud, Some structure theorems for finite free resolutions, *Advances in Math.* 12 (1974), 84–139.
5. I. S. Cohen, Commutative rings with restricted minimum condition, *Duke Math. J.* **17** (1950), 27–42.
6. J. A. Eagon und D. G. Northcott, Ideals defined by matrices and a certain complex associated with them, *Proc. Royal Soc. Ser. A* **269** (1962), 188–204.
7. M. Hochster, Cyclic purity versus purity in excellent noetherian rings, *Trans. Amer. Math. Soc.* **231** (1977), 463–488.
8. G. Levin und W. V. Vasconcelos, Homological dimensions and Macaulay rings, *Pacific J. Math.* **25** (1968), 315–323.
9. E. Matlis, Injective modules over noetherian rings, *Pacific J. Math.* **8** (1958), 511–528.
10. M. Nagata, "Local Rings," Interscience, New York, 1962.
11. J. Sally und W. V. Vasconcelos, Stable rings, *J. Pure Appl. Algebra* **4** (1974), 319–336.
12. G. Scheja und U. Storch, Differentielle Eigenschaften der Lokalisierungen analytischer Algebren, *Math. Ann.* **197** (1972), 137–170.
13. W. V. Vasconcelos, Reflexive modules over Gorenstein rings, *Proc. Amer. Math. Soc.* **19** (1968), 1349–1355.