Math. Z. 172, 63–75 (1980)

Mathematische Zeitschrift

Zur Konstruktion basischer Elemente

Winfried Bruns*

Fachbereich 3, Naturwissenschaften/Mathematik, Universität Osnabrück,
Abt. Vechta, Driverstr. 22, 2848 Vechta

Einleitung

In ihrer gemeinsamen Arbeit [9] haben Eisenbud und Evans einen Existenzsatz für basische Elemente in endlich erzeugten Moduln über (im wesentlichen) kommutativen noetherschen Ringen bewiesen und damit viele Theoreme der algebraischen K-Theorie und der kommutativen Algebra methodisch einheitlich hergeleitet. Inzwischen wurden mit modifizierten und erweiterten Fassungen des Existenzsatzes interessante neue Aussagen in [4, 5 und 11] gefunden. Wir haben in [6] versucht, die Aussagen über die Konstruktion basischer Elemente zu einem gewissen Abschluß zu bringen und mit ihren Anwendungen systematisch zu entwickeln. In dieser Arbeit wollen wir einen Teil der Ergebnisse aus [6] in komprimierter Form darstellen und insbesondere diejenigen Aussagen erörtern, die über die bisher bekannten Sätze wesentlich hinausgehen. Wir wollen hier nur erwähnen, daß wir schließlich eine zu der bekannten Ungleichung von Eagon und Northcott ([8]) komplementäre Aussage für die Höhe und den Grad von Determinantenidealen erhalten werden.

1. Hilfsmittel

In diesem Abschnitt stecken wir den begrifflichen Rahmen ab, in dem sich Aussagen über die Konstruktion basischer Elemente und k-basischer Untermoduln formulieren und beweisen lassen. Dabei ist unser Vorgehen von [18] beeinflußt worden.

Im folgenden bezeichnet R stets einen kommutativen Ring mit Einselement, $\operatorname{Spec} R$ die Menge der Primideale von R, M einen endlich erzeugten R-Modul und $\mathfrak{p}$ ein Primideal von R. N und N' sind Untermoduln von M, x ist ein Element von M.

* Die Ergebnisse dieser Arbeit entstammen der Habilitationsschrift des Verfassers.

0025-5874/80/0172/0063/$02.60

(1.1) **Definition.** Mit $\mu(\mathfrak{p}, M)$ benennen wir die Minimalerzeugendenanzahl des $R_\mathfrak{p}$-Moduls $M_\mathfrak{p}$ und sagen, N sei *k-basisch in M bei* $\mathfrak{p}$, wenn $\mu(\mathfrak{p}, M/N) \leqq \mu(\mathfrak{p}, M) - k$ ist. Das Element x heißt *basisch in M bei* $\mathfrak{p}$, wenn Rx dort 1-basisch ist. Wir setzen

$$\beta(\mathfrak{p}, N, M) := \mu(\mathfrak{p}, M) - \mu(\mathfrak{p}, M/N).$$

Schließlich nennen wir N' *k-basisch modulo N (in M) bei* $\mathfrak{p}$, wenn $\beta(\mathfrak{p}, (N'+N)/N, M/N) \geqq k$ ist.

Eine triviale, aber nützliche Gleichung:

(1.2) *Bei* $N \subset N'$ *ist* $\beta(\mathfrak{p}, N', M) = \beta(\mathfrak{p}, N, M) + \beta(\mathfrak{p}, N'/N, M/N)$.

Die Funktion $\mu(\ldots, M)$ ist unter unseren Voraussetzungen bekanntlich halbstetig nach oben auf $\operatorname{Spec} R$ bezüglich der Zariski-Topologie. Aus mehreren Gründen ist jedoch geboten, mit der konstruierbaren Topologie zu arbeiten: (a) Die in Anwendungen vorkommenden Teilmengen von $\operatorname{Spec} R$ sind oft weder Zariski-abgeschlossen noch Zariski-offen. (b) Die für uns wesentliche Funktion $\beta(\ldots, N, M)$ ist in der konstruierbaren Topologie stetig. (c) Die im weiteren ebenso wichtigen Dimensionsfunktionen (Definition siehe unten) sind in der konstruierbaren Topologie halbstetig nach oben. Zur Definition der konstruierbaren Topologie vgl. man [1], pp. 48, 49. Für uns ist jedoch folgende Kennzeichnung nach [18], Proposition 1.5 am bequemsten; wir beschränken uns dabei gleich auf den Fall noetherscher Teilmengen von $\operatorname{Spec} R$. ($P \subset \operatorname{Spec} R$ heißt *noethersch*, wenn jede Zariski-abgeschlossene Teilmenge $P' \subset P$ Vereinigung endlich vieler irreduzibler Zariski-abgeschlossener Teilmengen von P ist.)

(1.3) *Eine noethersche Teilmenge von* $\operatorname{Spec} R$ *ist genau dann konstruierbar, wenn sie gegenüber Durchschnittsbildung vollständig ist, wenn also jedes Primideal* $\mathfrak{p}$, *das in der Form* $\mathfrak{p} = \bigcap P'$, $P' \subset P$, *dargestellt werden kann, bereits zu* P *gehört.*

Als Endlichkeitskriterium verwenden wir:

(1.4) *Eine (noethersche) konstruierbare Teilmenge* P *von* $\operatorname{Spec} R$ *ist genau dann endlich, wenn jede Teilmenge von* P *konstruierbar ist.*

Wir geben der Klasse der in der konstruierbaren Topologie nach oben halbstetigen Funktionen einen speziellen Namen und beschreiben sie durch eine diese Bezeichnung rechtfertigende Eigenschaft.

(1.5) **Definition.** Sei $P \subset \operatorname{Spec} R$. Eine Funktion $\gamma\colon P \to \mathbb{Z}$ heißt D(urchschnitts)-*monoton*, wenn für jede Teilmenge P' von P gilt: Ist $\mathfrak{q} = \bigcap P'$ und $\mathfrak{q} \in P$, so existiert ein $\mathfrak{r} \in P'$ mit $\gamma(\mathfrak{r}) \leqq \gamma(\mathfrak{q})$. Die Funktion γ heißt *streng* D-*monoton*, wenn unter diesen Voraussetzungen im Fall $\mathfrak{q} \notin P'$ stets ein $\mathfrak{r} \in P'$ mit $\gamma(\mathfrak{r}) < \gamma(\mathfrak{q})$ existiert.

Es gelten folgende Aussagen:

(1.6) (a) *Die Funktion* γ *ist auf einer noetherschen konstruierbaren Teilmenge* P *von* $\operatorname{Spec} R$ *genau dann* D-*monoton, wenn sie bezüglich der konstruierbaren Topologie halbstetig nach oben ist.*

(b) *Die Summe einer* D-*monotonen und einer (streng)* D-*monotonen Funktion ist (streng)* D-*monoton.*

(1.7) *Sei* $P \subset \operatorname{Spec} R$ *noethersch und konstruierbar.*

(a) *Eine* D-*monotone Funktion auf* P *ist nach oben beschränkt.*

(b) *Eine streng* D-*monotone Funktion nimmt auf jeder konstruierbaren Teilmenge von* P *ihr Maximum in nur endlich vielen Punkten an.*

Beim Beweis von (1.6), (b) und (1.7) beachtet man: Ist $\mathfrak{p} = \bigcap P'$, $P' \subset P$, und $\mathfrak{p} \in P$ so gilt $\mathfrak{p} = \bigcap \{\mathfrak{q} \in P' \colon \gamma(\mathfrak{q}) \leqq \gamma(\mathfrak{p})\}$ bzw. bei strenger D-Monotonie $\mathfrak{p} = \bigcap \{ \mathfrak{q} \in P' \colon \gamma(\mathfrak{q}) < \gamma(\mathfrak{p})\}$. Dann folgen die Aussagen ohne Mühe; bei (1.7) benutzt man das Endlichkeitskriterium (1.4).

Bei der Definition von Dimensionsfunktionen lehnen wir uns an [18] an, spezialisieren uns jedoch gleich auf die konstruierbare Topologie.

(1.8) **Definition.** Eine Funktion δ auf $P \subset \operatorname{Spec} R$ mit Werten in der Menge $\mathbb{N}$ der nichtnegativen ganzen Zahlen heißt *Dimensionsfunktion*, wenn δ auf jeder konstruierbaren Teilmenge von P beschränkt ist und ihr Maximum nur in endlich vielen Punkten annimmt.

Die folgende Aussage ordnet den Begriff „Dimensionsfunktion" in das bereits entwickelte System ein:

(1.9) $P \subset \operatorname{Spec} R$ *sei noethersch und konstruierbar. Eine Funktion* $\delta \colon P \to \mathbb{N}$ *ist genau dann Dimensionsfunktion, wenn sie streng* D-*monoton ist.*

Zur Abkürzung setzen wir: $\delta(P) := \max\{\delta(\mathfrak{p}) \colon \mathfrak{p} \in P\}$. Die noch offene Richtung von (1.9) beweist man so: Sei $P' \subset P$, $\mathfrak{q} = \bigcap P'$, $\mathfrak{q} \in P$, $\mathfrak{q} \notin P'$ und $\bar{P}'$ die konstruierbar-abgeschlossene Hülle von P'. Falls $\delta(\mathfrak{q}) = \delta(\bar{P}')$, folgt die Existenz eines $\mathfrak{p} \in P'$ mit $\delta(\mathfrak{p}) < \delta(\mathfrak{q})$ aus der Unendlichkeit von P' und der definierenden Eigenschaft von Dimensionsfunktionen. Im anderen Fall sei $\mathfrak{a}$ der Durchschnitt der endlich vielen Primideale $\mathfrak{r} \in \bar{P}'$ mit $\delta(\mathfrak{r}) = \delta(\bar{P}')$. Man ersetzt P' durch $P'' = P' - \{\mathfrak{p} \colon \mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}\}$. Da $\mathfrak{q} = \bigcap P''$ ist, beendet ein Induktionsargument den Beweis.

Die Einführung des Begriffs Dimensionsfunktion ist nur dann gerechtfertigt, wenn die wichtigsten idealtheoretischen Funktionen Dimensionenfunktionen sind, wir also Aussagen formulieren können, die sich vielfältig spezialisieren lassen und lästige Fallunterscheidungen vermeiden helfen.

(1.10) Sei $P \subset \operatorname{Spec} R$ und $\mathfrak{p} \in P$. Unter der *Dimension* von $\mathfrak{p}$ in P, kurz $\dim(\mathfrak{p}, P)$, verstehen wir das Supremum der Zahlen n, zu denen es Ketten $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 \subsetneqq \dots \subsetneqq \mathfrak{p}_n$ mit $\mathfrak{p}_i \in P$ gibt; falls die Länge dieser Ketten unbeschränkt ist, sei $\dim(\mathfrak{p}, P) := \infty$. Die *Höhe* von $\mathfrak{p}$ in P, kurz $\operatorname{ht}(\mathfrak{p}, P)$ ist entsprechend definiert, jedoch mit absteigenden Ketten. Abkürzungen:

$$\dim(P) := \sup\{\dim(\mathfrak{p}, P) \colon \mathfrak{p} \in P\}, \qquad \dim(\mathfrak{p}) := \dim(\mathfrak{p}, \operatorname{Spec} R),$$
$$\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) := \operatorname{ht}(\mathfrak{p}, \operatorname{Spec} R).$$

(1.11) P *sei eine noethersche Teilmenge von* $\operatorname{Spec} R$ *mit* $\dim(P) < \infty$. *Dann sind* $\dim(\dots, P)$ *und* $\dim(P) - \operatorname{ht}(\dots, P)$ *Dimensionsfunktionen auf* P.

Die in (1.11) genannten Funktionen genügen ja noch strengeren Monotoniebedingungen als für Dimensionsfunktionen erforderlich. Neben der Dimension und der Höhe ist die Tiefe von Primidealen in noetherschen Ringen eine wichtige Invariante:

(1.12) Sei R ein noetherscher Ring, $\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec} R$. Unter der *Tiefe* $\mathrm{t}(\mathfrak{p})$ des Primideals $\mathfrak{p}$ verstehen wir die maximale Länge einer $R_\mathfrak{p}$-Sequenz in $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$.

(1.13) *Sei R ein noetherscher Ring. Die Funktion* $-\mathrm{t}(\ldots)$ *ist streng* D-*monoton auf* $\operatorname{Spec} R$. *Somit ist für* $P\subset\operatorname{Spec} R$ *mit* $n:=\sup\{\mathrm{t}(\mathfrak{p})\colon \mathfrak{p}\in P\}<\infty$ *die Funktion* $n-\mathrm{t}(\ldots)$ *eine Dimensionsfunktion.*

Beweis. Das entscheidende Argument liefert [13], (6.10.6), p. 157: Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal in R; dann existiert ein $r\in R-\mathfrak{p}$ derart, daß für alle $\mathfrak{q}\in\operatorname{Spec} R$, $\mathfrak{q}\supset\mathfrak{p}$, $r\notin\mathfrak{q}$ gilt: $\mathrm{t}(\mathfrak{q})=\mathrm{t}(\mathfrak{p})+\mathrm{t}(\mathfrak{p}/\mathfrak{q})$. Daraus folgt sofort, daß $-\mathrm{t}(\ldots)$ streng D-monoton ist.

Eine weitere Dimensionsfunktion ist erwähnenswert: die von Wiegand in [18] konstruierte Funktion Γ. Sie ist die jeweils „kleinste" Dimensionsfunktion auf einer Teilmenge P von $\operatorname{Spec} R$ – vorausgesetzt, es existiert überhaupt eine Dimensionsfunktion auf P. Ihre Definition ergibt sich zwingend aus (1.9). Die Existenz einer „kleinsten" Dimensionsfunktion folgt indessen ohne explizite Konstruktion schon daraus, daß das Infimum von Dimensionsfunktionen wieder eine Dimensionsfunktion ist.

Wir beschließen diesen Abschnitt mit einem Hilfssatz, der, wie wir sehen werden, gerade besagt, daß bei einem Konstruktionsschritt nur endlich viele Primideale kritisch sind.

(1.14) **Hilfssatz.** *M sei ein endlich erzeugter R-Modul, N ein Untermodul von M, P eine noethersche konstruierbare Teilmenge von* $\operatorname{Spec} R$. *Weiter seien gegeben eine* D-*monotone Funktion* $\gamma\colon P\to\mathbb{Z}$ *und eine Dimensionsfunktion* δ *auf* P. *Sei*

$$P':=\{\mathfrak{p}\in P\colon \gamma(\mathfrak{p})-\beta(\mathfrak{p},N,M)>0\}$$

und

$$n:=\max\{\delta(\mathfrak{q})-\beta(\mathfrak{q},N,M)\colon \mathfrak{q}\in P'\}.$$

Dann ist $P'':=\{\mathfrak{r}\in P'\colon \delta(\mathfrak{r})-\beta(\mathfrak{r},N,M)=n\}$ *endlich.*

Beweis. $\gamma(\ldots)-\beta(\ldots,N,M)$ ist Summe zweier D-monotoner Funktionen, folglich P' (noethersch und) konstruierbar. Die Funktion $\delta(\ldots)-\beta(\ldots,N,M)$ ist sogar streng D-monoton, und daher folgt die Behauptung aus (1.7).

2. Konstruktionssätze

Mit den im vorangegangenen Abschnitt eingeführten Bezeichnungen kann man die Konstruktionsaufgabe für basische Elemente grob so formulieren:

(A) Unter geeigneten Voraussetzungen über N und die Teilmenge $P\subset\operatorname{Spec} R$ konstruiere man ein Element $x\in N$, das bei allen $\mathfrak{p}\in P$ basisch in M ist.

Es hat sich gezeigt, daß man zugleich eine allgemeinere Aufgabe in Angriff nehmen sollte:

(B) Sei γ eine Funktion auf P mit Werten in der Menge $\mathbb{N}$ der nichtnegativen ganzen Zahlen, N ein bei allen $\mathfrak{p}\in P$ $\gamma(\mathfrak{p})$-basischer Untermodul von M. Man schätze unter geeigneten Voraussetzungen über P und γ ab, wieviel Elemente von N zur Erzeugung eines Untermoduls N' von N gebraucht werden, der ebenfalls $\gamma(\mathfrak{p})$-basisch in M bei allen $\mathfrak{p}\in P$ ist.

Viele Anwendungen lassen sich nämlich sehr natürlich in der Form (B) beschreiben, und auch methodisch ist es vorteilhaft, (A) als Spezialfall von (B) zu betrachten. Wir werden mit der Lösung der Aufgabe (A) für endliche Teilmengen P beginnen. Aus ihr und dem Endlichkeitsargument (1.14) ergibt sich eine Antwort zu (B), die wiederum bei der endgültigen Lösung von (A) als „Verkürzungsprinzip" benutzt wird. Es ist dann naheliegend, (B) noch einmal anzugehen. Dies geschieht in Abschnitt 3. Dort wird es sich auch zeigen, daß man zweckmäßig die Konstruktion basischer Elemente und $\gamma(\mathfrak{p})$-basischer Untermoduln simultan in mehreren Moduln behandelt.

Für bestimmte Anwendungen ist es wichtig, die bei der Konstruktion basischer Elemente verwendeten Koeffizienten einer Teilmenge von R, z.B. einem in R enthaltenen unendlichen Körper, entnehmen zu können (vgl. [5, 11]). Wir treffen daher folgende Definition:

(2.1) **Definition.** Eine Teilmenge R' von R heißt *Koeffizientenbereich*, wenn sie additive Untergruppe und multiplikativ abgeschlossen ist und für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ von R die Restklassen der Elemente von R eine unendliche Teilmenge von $R/\mathfrak{p}$ bilden.

Definition (2.1) hat einen Schönheitsfehler: R ist im allgemeinen kein Koeffizientenbereich. Eine subtilere Fassung könnte diesen Mangel zwar beheben, würde uns aber später zu komplizierteren Formulierungen zwingen.

(2.2) **Hilfssatz.** *Die Primideale $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_k$ von R seien paarweise verschieden, N sei ein R-Modul. Zu jeden $i=1, \ldots, k$ sei eine endliche Menge $\mathfrak{M}(\mathfrak{p}_i)$ von Paaren (M,f) gegeben, bei denen M ein endlich erzeugter R-Modul, $f\colon N\to M$ ein R-Homomorphismus und $f(N)$ 1-basisch in M bei $\mathfrak{p}_i$ ist. Jeder der Restklassenringe $R/\mathfrak{p}_i$ besitze wenigstens $|\mathfrak{M}(\mathfrak{p}_i)|+1$ Elemente. Dann gilt:*

(1) *Es existiert ein $x\in N$ derart, daß für alle $i=1, \ldots, k$ und alle $(M,f)\in\mathfrak{M}(\mathfrak{p}_i)$ das Element $f(x)$ basisch in M bei $\mathfrak{p}_i$ ist.*

(2) *Wird N von $y_1, \ldots, y_m$ erzeugt, kann $x=y_1+a_2y_2+\ldots+a_my_m$ mit geeigneten $a_t\in R$ gewählt werden.*

(3) *Die Koeffizienten a_t können gegebenenfalls einem Koeffizientenbereich $R'\subset R$ entnommen werden.*

Zur Bezeichnungsweise: $|\mathfrak{M}(\mathfrak{p}_i)|$ ist die Anzahl der Elemente von $\mathfrak{M}(\mathfrak{p}_i)$.

Beweis. (a) Man wählt einen endlich erzeugten Untermodul N' von N, für den $f(N')$ ebenfalls 1-basisch in M bei $\mathfrak{p}_i$ ist für alle $i=1, \ldots, k$ und $(M,f)\in\mathfrak{M}(\mathfrak{p}_i)$. Dies ist möglich, weil die $R_\mathfrak{p}$-Untermoduln $(f(N)_\mathfrak{p}+\mathfrak{p}M_\mathfrak{p})/\mathfrak{p}M_\mathfrak{p}$ endlich erzeugte

$R_\mathfrak{p}$-Untermoduln von $M_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}M_\mathfrak{p}$ sind und es wegen des Lemmas von Nakayama nur auf diese Untermoduln ankommt. Damit ist (a) auf (b) reduziert.

(b) Induktion über k, bei der wir annehmen dürfen, $\mathfrak{p}_k$ sei minimal unter den Primidealen $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_k$. Daher existiert ein Element $r \in R$ mit $r \in (\mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_{k-1}) - \mathfrak{p}_k$. Nach Induktionsvoraussetzung dürfen wir annehmen, daß ein Element $x' = x_1 + a'_1 x_2 + \ldots + a'_m x_m$ der Behauptung hinsichtlich $i = 1, \ldots, k-1$ genügt. Wir setzen $y'_1 := x'$, $y'_t = r y_t$ für $t = 2, \ldots, m$. Aus dem Lemma von Nakayama folgt, daß dann einerseits $f(\sum R y'_t)$ 1-basisch in M bei $\mathfrak{p}_k$ ist, $(M, f) \in \mathfrak{M}(\mathfrak{p}_k)$, und es andererseits genügt, ein Element $x = y'_1 + a''_2 y'_2 + \ldots + a''_m y'_m$ zu konstruieren, das die Behauptung für k erfüllt. Wir dürfen also annehmen: $k = 1$.

Bei $k = 1$ führt man Induktion über m mit dem trivialen Induktionsanfang $m = 1$. Bei $m > 1$ bestimmt man ein Element a_m derart, daß der von $f(y_1 + a_m y_m)$, $f(y_2), \ldots, f(y_{m-1})$ in M erzeugte Untermodul immer noch 1-basisch in M bei $\mathfrak{p}_1$ ist, $(M, f) \in \mathfrak{M}(\mathfrak{p}_1)$. Dies ist möglich, weil jedes Paar (M, f) die Elemente höchstens einer Restklasse modulo $\mathfrak{p}_1$ von der Wahl zu a_m ausschließt, nämlich diejenigen, für die bei $f(y_m) \not\equiv 0 \bmod \mathfrak{p}_1 M_{\mathfrak{p}_1}$ gilt: $f(y_1) + a_m f(y_m) \equiv 0 \bmod \mathfrak{p}_1 M_{\mathfrak{p}_1}$.

(c) Induktion über m wie soeben, wobei aber beim Induktionsschluß alle Primideale $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_k$ simultan zu betrachten sind. Daß man auch jetzt ein geeignetes Element $a_m \in R'$ finden kann, beruht auf einer nicht sehr schwierigen Verallgemeinerung von [3], p. 75, Lemme 6.

Satz (2.3) ist die Grundlage aller weiterer Aussagen über die Konstruktion basischer Elemente und k-basischer Untermoduln, besitzt aber selbst bereits zahlreiche Anwendungen durch Spezialisierung.

(2.3) **Satz.** *N sei ein R-Modul. Zu jedem Element i der endlichen Menge I seien gegeben:*

(a) *eine noethersche konstruierbare Teilmenge P_i von $\operatorname{Spec} R$ mit einer D-monotonen Funktion γ_i: $P_i \to \mathbb{N}$ und einer Dimensionsfunktion δ_i: $P_i \to \mathbb{N}$, so daß $\gamma_i(\mathfrak{p}) \leqq \delta_i(\mathfrak{p})$ für alle $\mathfrak{p} \in P_i$, und*

(b) *ein endlich erzeugter R-Modul M und ein R-Homomorphismus f_i: $N \to M_i$ mit $\beta(\mathfrak{p}, f_i(N), M_i) \geqq \gamma_i(\mathfrak{p})$ für alle $\mathfrak{p} \in P_i$.*

(c) *Ferner sei $|R/\mathfrak{p}| \geqq |I| + 1$ für alle $\mathfrak{p} \in \bigcup P_i$.*

Wir setzen $w := \max\{\delta_i(P_i) \colon i \in I\}$. Dann gilt:

(1) *Es existieren Elemente $x_1, \ldots, x_w \in N$ mit*

$$\beta\left(\mathfrak{p}, \sum_{t=1}^{\delta_i(P_i)} R f_i(x_t), M_i\right) \geqq \gamma_i(\mathfrak{p})$$

für alle $i \in I$, $\mathfrak{p} \in P_i$.

(2) *Wird N von $y_1, \ldots, y_m, m \geqq w$, erzeugt, so können die x_t mit geeigneten $a_{tn} \in R$ in der Form $x_t = y_t + \sum_{n=t+1}^{m} a_{tn} y_n$ konstruiert werden.*

(3) *Die Elemente a_{tn} können gegebenenfalls einem Koeffizientenbereich $R' \subset R$ entnommen werden.*

Beweis. Wir konstruieren $x_1, \ldots, x_w$ sukzessiv so, daß für $v=1, \ldots, w$ gilt: Sei $N_i^{(v)} = \sum_{t=1}^{v} R f_i(x_t)$; dann ist

$$P_i^{(v)} := \{\mathfrak{p} \in P_i \colon \gamma_i(\mathfrak{p}) - \beta(\mathfrak{p}, N_i^{(v)}, M_i) > 0\}$$

leer oder

$$\max\{\delta_i(\mathfrak{p}) - \beta(\mathfrak{p}, N_i^{(v)}, M_i) \colon \mathfrak{p} \in P_i^{(v)}\} \leqq \delta_i(P_i) - v.$$

Wenn wir noch $P_i^{(0)} := P_i$ setzen, können wir die Induktion bei $v=0$ beginnen lassen. $P_i^{(v)}$ ist die Menge der Primideale, bei denen $N_i^{(v)}$ noch nicht ausreichend basisch ist. Wegen $\delta_i(\mathfrak{p}) \geqq \gamma_i(\mathfrak{p})$ bleibt für $v \geqq \delta_i(P_i)$ nur die Möglichkeit $P_i^{(v)} = \emptyset$.

Seien $x_1, \ldots, x_v$ wie soeben gefordert konstruiert. Wie auch immer x_{v+1} gewählt wird, stets ist $P_i^{(v+1)} \subset P_i^{(v)}$. Daher genügt es, x_{v+1} so zu bestimmen, daß alle Primideale $\mathfrak{p} \in P_i^{(v)}$ mit $\delta_i(\mathfrak{p}) - \beta(\mathfrak{p}, N_i^{(v)}, M_i) = \delta_i(P_i) - v$ der Menge $P_i^{(v+1)}$ nicht mehr angehören, daß für diese Primideale also

$$\beta(\mathfrak{p}, N_i^{(v)} + R f_i(x_{v+1}), M_i) = \beta(\mathfrak{p}, N_i^{(v)}, M_i) + 1$$

ist. Sei E_i die Menge dieser „kritischen" Primideale und $E := \bigcup E_i$.

Hilfssatz (1.14) garantiert, daß E endlich ist. Um nun (2.2) in Verbindung mit (1.2) anwenden zu können, setzt man $\bar{N} := N \Big/ \sum_{t=1}^{v} R x_t$, $\bar{M}_i := M/N_i^{(v)}$, wählt $\bar{f}_i \colon \bar{N} \to \bar{M}_i$ als den von f_i induzierten Homomorphismus und $\mathfrak{M}(\mathfrak{p}) := \{(\bar{M}_i, \bar{f}_i) \colon \mathfrak{p} \in P_i^{(v)}\}$ für alle $\mathfrak{p} \in E$ und beachtet schließlich bei (2) und (3), daß die Restklassen von $y_{v+1}, \ldots, y_m$ den Modul $\bar{N}$ erzeugen.

Wir haben in [6], Abschnitt 4.1, 4.2 ausgeführt, wie sich durch Spezialisierung von Satz (2.3) (fast) unmittelbar folgende Anwendungen ergeben:

(1) das Theorem von Forster-Swan ([12], [17]) über die Abschätzung der globalen Erzeugendenzahl eines Moduls M durch die $\mu(\mathfrak{p}, M)$,

(2) der Satz von Kronecker über die Darstellung algebraischer Teilmengen des n-dimensionalen affinen Raumes als Durchschnitt von $n+1$ Hyperflächen ([14]),

(3) das Stable Range Theorem von Bass ([2]),

(4) Aussagen über Determinantenideale von Matrizen in „allgemeiner Lage" ([5, 10, 15]) und

(5) diverse Aussagen über die Konstruktion von Parametersystemen und R-Sequenzen.

Auch die Konstruktion von Elementen, die bei mehr als nur endlich vielen Primidealen in einem R-Modul basisch sind, beruht auf einer Spezialisierung von Satz (2.3). Der folgende Satz verallgemeinert das grundlegende Theorem A von Eisenbud und Evans, das in [9] mit einem anderen Beweisschema hergeleitet wurde und in [4], [5] und [11] Erweiterungen gefunden hat.

(2.4) **Satz.** N sei ein R-Modul. Zu jedem Element i der endlichen Menge I seien gegeben:

(a) *eine noethersche konstruierbare Teilmenge P_i von* Spec R *mit einer Dimensionsfunktion δ_i und*

(b) *ein endlich erzeugter R-Modul M_i und ein R-Homomorphismus f_i: $N \to M_i$ mit $\beta(\mathfrak{p}, f_i(N), M_i) \geqq \delta_i(\mathfrak{p})+1$ für alle $\mathfrak{p} \in P_i$.*

(c) *Ferner sei $|R/\mathfrak{p}| \geqq |I|+1$ für alle $\mathfrak{p} \in \bigcup P_i$.*

Dann gilt:

(1) *Es existiert ein Element $x \in N$, für das $f_i(x)$ bei allen $\mathfrak{p} \in P_i$ basisch in M_i ist, $i \in I$.*

(2) *Wird N von $y_1, \ldots, y_m$ erzeugt, läßt sich x mit geeigneten Elementen $a_t \in R$ in der Form $x = y_1 + a_2 y_2 + \ldots + a_m y_m$ wählen.*

(3) *Die Elemente a_t können gegebenenfalls einem Koeffizientenbereich $R' \subset R$ entnommen werden.*

Beweis. Zunächst führt man Teil (1) mit Hilfe von (2.3) auf Teil (2) zurück, indem man $\gamma_i(\mathfrak{p}) := \delta_i(\mathfrak{p})+1$ setzt und die in (2.3) vorkommende Dimensionsfunktion als $\delta_i(\mathfrak{p})+1$ wählt. Satz (2.3) impliziert dann die Existenz eines endlich erzeugten Untermoduls N' von N, auf den sich die Voraussetzungen von (2.4) übertragen.

Zum Beweis der Teile (2) und (3) führen wir eine Induktion über m, bei der (2.3) den Induktionsschluß sichert. Im Fall $m=1$ ist nichts zu konstruieren. Sei $m>1$ und $P_i' := \{\mathfrak{p} \in P_i: \beta(\mathfrak{p}, f_i(N), M_i) < m\}$. Wie man auch die a_t wählen mag – bei Primidealen $\mathfrak{p} \in P_i - P_i'$ ist $f_i(y_1 + \sum a_t y_t)$ basisch in M_i. P_i' ist wieder eine noethersche konstruierbare Teilmenge von Spec R, $\delta_i | P_i'$ eine Dimensionsfunktion, und die Voraussetzung $\beta(\mathfrak{p}, f_i(N), M_i) \geqq \delta_i(\mathfrak{p})+1$ impliziert $\delta_i(P_i') = \max\{\delta_i(\mathfrak{p}): \mathfrak{p} \in P_i'\} < m-1$. Nun wenden wir wieder (2.3) mit $\gamma_i(\mathfrak{p}) = \delta_i(\mathfrak{p})+1$ und Dimensionsfunktion $\delta_i(\mathfrak{p})+1$ auf die P_i' an: mit geeigneten $a_{tu} \in R$ bzw. $a_{tu} \in R'$ gilt für

$$x_t' = x_t + \sum_{u=t+1}^{m} a_{tu} x_u, \qquad t=1, \ldots, w, \qquad w = \max\{\delta_i(\mathfrak{p})+1 : \mathfrak{p} \in P_i'\} < m$$

die Ungleichung

$$\beta\left(\mathfrak{p}, \sum_{t=1}^{w} R f_i(x_t'), M_i\right) \geqq \delta_i(\mathfrak{p})+1, \qquad \mathfrak{p} \in P_i', \ i \in I.$$

Nach Induktionsannahme erhalten wir ein Element $x' = x_1' + \sum_{t=2}^{w} a_t' x_t$, das der Behauptung des Satzes genügt. Wir ersparen es uns, die Koeffizienten $a_2, \ldots, a_m$ aus den a_{tu} und den a_t' zu berechnen.

Von den Anwendungen des Satzes (2.4) sind zu nennen:

(1) der Satz von Serre über die Existenz unimodularer Elemente in projektiven Moduln ([16, 2, 9]),

(2) Reduktion des Ranges n-ter Syzygienmoduln (Sätze vom Typ des „Theorems von Bourbaki", [3], p. 76, Théorème 6) und Fortsetzung freier Auflösungen mit freien Moduln möglichst kleinen Ranges ([4]),

(3) lokale Bertini-Sätze ([5], vor allem [11]).

(2.5) *Anmerkung.* Die Sätze (2.2), (2.3) und (2.4) – ausgenommen die Teile (3) – lassen sich für eine allgemeinere Situation formulieren: R wie bisher, A ist eine als R-Modul endlich erzeugte (nicht notwendig kommutative) R-Algebra, M und N sind A-Moduln. Dann sind die Koeffizienten a_t und a_{kt} in A zu wählen und die Anzahlbedingung für die Ringe $R/\mathfrak{p}$ abzuändern, weil die einfachen Komponenten der halbeinfachen Ringe $A_\mathfrak{p}$/(Jacobsonradikal von $A_\mathfrak{p}$) i.a. eine Länge >1 haben (vgl. [6]). Eine geringe Modifikation, die Konstruktion von x_1 in (2.3) bzw. x in (2.2) und (2.4) betreffend, ist notwendig, wenn man (2.4) auch zum Beweis des Bass'schen Kürzungssatzes verwenden will. Im übrigen lassen sich die Sätze dieses Abschnitts mutatis mutandis auch für Steinsche Algebren formulieren ([6, 7]).

3. Erweiterung der Konstruktionssätze

In diesem Abschnitt geht es darum, Satz (2.4) konsequent für die Problemstellung des Satzes (2.3) zu nutzen. Der Übersichtlichkeit halber haben wir die Ausgangssituation gegenüber den Sätzen (2.3) und (2.4) vereinfacht. Wie der Beweis des folgenden Satzes zeigen wird, ist die für (2.3) und (2.4) gewählte Form jedoch kein Selbstzweck. Satz (3.1) kann man etwa als Aussage über die Konstruktion „möglichst basischer" Erzeugendensysteme verstehen. Er ist nicht direkt mit (2.3) vergleichbar, wir werden aber in Satz (3.3) eine Folgerung formulieren, die sich mit Satz (2.3) vergleichen läßt. Man beachte, daß in Satz (3.1) Terme auftreten, wie sie in der Abschätzung von Eagon und Northcott ([8]) für die Höhe von Determinantenidealen vorkommen.

(3.1) **Satz.** *M sei ein endlich erzeugter R-Modul, N ein Untermodul von M und $w \geqq 0$ eine ganze Zahl. P sei eine noethersche konstruierbare Teilmenge von* $\operatorname{Spec} R$ *und δ eine Dimensionsfunktion auf P. Für alle Primideale $\mathfrak{p} \in P$ gelte $\beta(\mathfrak{p}, N, M) \geqq k$ und $|R/\mathfrak{p}| \geqq 2^{w-1}+1$.*

(1) *Dann existieren Elemente $x_1, \ldots, x_w \in N$ derart, daß für jede Teilmenge J von $\{1, \ldots, w\}$ gilt:*

$$\beta(\mathfrak{p}, \sum_{j \in J} R x_j, M) \geqq k' \qquad \textit{für alle Primideale } \mathfrak{p} \in P$$

mit

$$\delta(\mathfrak{p}) \geqq \delta(P) - (k-k'+1)(|J|-k'+1)+1, \qquad k' = 1, \ldots, \min\{|J|, k\}.$$

(2) *Wird N von $y_1, \ldots, y_m$, $m \geqq w$, erzeugt, lassen sich $x_1, \ldots, x_w$ mit geeigneten $a_{tu} \in R$ sukzessiv in der Form $x_t = \sum_{u=1}^{t-1} a_{tu} x_t + \sum_{n=t+1}^{m} a_{tu} y_t$ wählen.*

(3) *Die Koeffizienten a_{tu} können gegebenenfalls einem Koeffizientenbereich $R' \subset R$ entnommen werden.*

Beweis. Wir verwenden folgende Bezeichnungen:

$$\nu(J,k') := (k-k'+1)(|J|-k'+1)-1$$
$$\Delta(J,k') := \{\mathfrak{p}\in P\colon \delta(\mathfrak{p}) \geqq \delta(P)-\nu(J,k')\}.$$

Die Elemente $x_1,\ldots,x_w$ werden sukzessiv konstruiert. Wir dürfen annehmen, daß $x_1,\ldots,x_{w-1}$ bereits gefunden sind und die Aussage des Satzes für alle Teilmengen von $\{1,\ldots,w-1\}$ erfüllt ist. Für jede Teilmenge $J\subset\{1,\ldots,w\}$ mit $w\in J$ setzen wir $\tilde{J} := J-\{w\}$. Die Wahl von x_w ist kritisch bei denjenigen Primidealen $\mathfrak{p}\in\Delta(J,k')$, bei denen $N(\tilde{J}) := \sum_{j\in\tilde{J}} Rx_j$ noch nicht hinreichend basisch ist, also bei den Primidealen in

$$Q(J,k') := \{\mathfrak{p}\in\Delta(J,k')\colon \beta(\mathfrak{p},N(\tilde{J}),M)<k'\}.$$

Damit durch Hinzunahme eines Elementes x_w das Ziel überhaupt erreicht werden kann, muß gelten:

(A) Für alle $\mathfrak{p}\in Q(J,k')$ ist $\beta(\mathfrak{p},N(\tilde{J}),M)\geqq k'-1$.

Wir schieben den Beweis der Behauptung (A) auf. Um x_w bei allen $\mathfrak{p}\in Q(J,k')$ basisch modulo $N(\tilde{J})$ wählen und so die Konstruktion abschließen zu können, müssen wir die Voraussetzungen von Satz (2.4) erfüllen. Die Mengen $Q(J,k')$ sind sicherlich konstruierbar, und daher ist für jede Teilmenge $J\subset\{1,\ldots,w\}$ mit $w\in J$ auch

$$Q(J) := \bigcup\{Q(J,k')\colon k'=1,\ldots,\min\{k,|J|\}\}$$

konstruierbar. Die $Q(J)$ entsprechen den P_i des Satzes (2.4). Wie man eine Dimensionsfunktion auf $Q(J)$ konstruiert, ist naheliegend. Für $\mathfrak{p}\in Q(J,k')$ setzt man zunächst

$$\delta_{J,k'}(\mathfrak{p}) := \delta(\mathfrak{p})-\min\{\delta(\mathfrak{q})\colon \mathfrak{q}\in Q(J,k')\}$$

und dann für $\mathfrak{p}\in Q(J)$

$$\delta_J(\mathfrak{p}) := \max\{\delta_{J,k'}(\mathfrak{p})\colon \mathfrak{p}\in Q(J,k')\}.$$

Um (2.4) anwenden zu können, setzen wir ferner $M_J := M/N(\tilde{J})$ und wählen $f_J\colon N\to M_J$ als Komposition der Einbettung $N\to M$ mit dem natürlichen Homomorphismus $M\to M/N(\tilde{J})$. Man beachte, daß die Anzahlbedingung für die Ringe $R/\mathfrak{p}$ erfüllt ist. Damit haben wir nur noch die Ungleichung

(B) $\quad\beta(\mathfrak{p},N/N(\tilde{J}),M/N(\tilde{J}))\geqq\delta_J(\mathfrak{p})+1$ für alle $\mathfrak{p}\in Q(J)$

und die Behauptung (A) nachzuweisen.

Zu (A): Nach Induktionsvoraussetzung gilt $\beta(\mathfrak{p},N(\tilde{J}),M)\geqq k'-1$ für alle Primideale $\mathfrak{p}\in\Delta(\tilde{J},k'-1)$. Da $\nu(\tilde{J},k'-1)\geqq\nu(J,k')$ ist, folgt $Q(J,k')\subset\Delta(J,k')\subset\Delta(\tilde{J},k'-1)$ und damit (A).

Zu (B): Für $\mathfrak{p}\in Q(J,k')$ ist ja $\beta(\mathfrak{p},N(\tilde{J}),M)=k'-1$, also $\beta(\mathfrak{p},N/N(\tilde{J}),M/N(\tilde{J}))\geqq k-k'+1$. Andererseits läßt sich $\delta(\mathfrak{p})$ für ein Primideal $\mathfrak{p}\in Q(J,k')$ wie folgt einschließen:

$$\delta(P)-\nu(J,k')\leqq\delta(\mathfrak{p})\leqq\delta(P)-\nu(\tilde{J},k')-1.$$

Die linke Ungleichung bestimmt ja gerade $Q(J, k')$ und die rechte Ungleichung gilt, weil bei $k' \leqq |\tilde{J}|$ nach Induktionsvoraussetzung $Q(J, k') \cap \Delta(\tilde{J}, k') = \emptyset$ und bei $k' = |J| > |\tilde{J}|$ ohnehin $\Delta(\tilde{J}, k') = \emptyset$ ist. Da $v(J, k') - v(\tilde{J}, k') - 1 = k - k'$ ist, impliziert die Einschließung von $\delta(\mathfrak{p})$ die Ungleichung $\delta_{J,k'}(\mathfrak{p}) \leqq k - k'$ und diese Ungleichung zusammen mit $\beta(\mathfrak{p}, N/N(\tilde{J}), M/N(\tilde{J})) \geqq k - k' + 1$ die Behauptung (B).

Bei den Teilen (2) und (3) ist zu beachten, daß N von $y_1, \ldots, y_{w-1}, x_w, \ldots, x_m$ erzeugt wird.

(3.2) *Anmerkung.* Die Anzahlbedingung läßt sich abschwächen, man vgl. dazu [6], pp. 100, 101. Ist man an der Aussage von Satz (3.1) nur für die Anfangsstücke $\{1, \ldots, w'\}$ und nicht für alle Teilmengen J von $\{1, \ldots, w\}$ interessiert, kann die Anzahlbedingung weggelassen und $x_t = y_t + \sum_{u=t+1}^{m} a_{tu} y_u$ gewählt werden. (Man hat dann ja im Beweis nur eine einzige Teilmenge J von $\{1, \ldots, w\}$, nämlich $\{1, \ldots, w\}$ selbst, zu betrachten.)

(3.3) **Satz.** *M sei ein endlich erzeugter R-Modul, N ein Untermodul von M, P eine noethersche konstruierbare Teilmenge von* $\operatorname{Spec} R$, *und δ eine Dimensionsfunktion auf P. Es gelte $\beta(\mathfrak{p}, N, M) \geqq k \geqq k'$. Sei*

$$w := \left\lceil \frac{\delta(P) + 1}{k - k' + 1} \right\rceil + k' - 1.$$

Dann existieren $x_1, \ldots, x_w \in N$ derart, daß für alle $\mathfrak{p} \in P$ gilt:

$$\beta(\mathfrak{p}, \textstyle\sum R x_t, M) \geqq k'.$$

Zur Bezeichnungsweise: Für $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $\lceil \alpha \rceil$ die kleinste ganze Zahl $\geqq \alpha$.

Beweis. Nach (3.1) können $x_1, \ldots, x_w$ so konstruiert werden, daß $\beta(\mathfrak{p}, \sum x_t, M) \geqq k'$ für alle Primideale $\mathfrak{p}$ mit $\delta(\mathfrak{p}) \geqq \delta(P) - v(\{1, \ldots, w\}, k')$. Einsetzen ergibt sofort $\delta(P) - v(\{1, \ldots, w\}, k') \leqq 0$. (Nach Anmerkung (3.2) können wir auf die Anzahlbedingung verzichten.)

Mit Satz (2.3) hätten wir nur $w = \delta(P) + k'$ erhalten.

4. Determinantenideale

Eagon und Northcott haben in [8] eine Ungleichung für die Höhe und den Grad von Determinantenidealen bewiesen. Sei Y eine (p, q)-Matrix mit Koeffizienten in einem noetherschen Ring R; dann gilt für das von den r-reihigen Minoren von Y erzeugte Ideal $I_r(Y)$ die Ungleichung $\operatorname{ht}(I_r(Y)) \leqq (p - r + 1)(q - r + 1)$, solange nicht $I_r(Y) = R$. Diese Ungleichung zieht eine entsprechende Aussage für den Grad von $I_r(Y)$ nach sich. (Der Grad eines Ideals ist die maximale Länge einer in ihm enthaltenen R-Sequenz.) Mittels Spezialisierung läßt sich Satz (3.1) als eine zu der Ungleichung von Eagon und Northcott komplementäre Aussage interpretieren.

Wenn wir im Fall $m = w$ die in Satz (3.1), (2) konstruierten Elemente x_t in der Form $x_t = \sum_{u=1}^{m} b_{tu} y_u$ schreiben, so bilden die Koeffizienten (b_{tu}) eine elementare

(m, m)-Matrix; (b_{tu}) ist insbesondere invertierbar. (Eine quadratische Matrix nennen wir elementar, wenn sie Produkt von Matrizen ist, die bis auf ein Element außerhalb der Hauptdiagonalen mit der Einheitsmatrix übereinstimmen.)

(4.1) **Satz.** *R sei ein noetherscher Ring, Y eine (p,q)-Matrix mit Koeffizienten in R und r eine ganze Zahl, $1 \leqq r \leqq \min\{p,q\}$.*

(1) *Sei $\operatorname{ht}(I_r(Y)) \geqq n$. Jeder der Ringe $R/\mathfrak{p}$, $\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) \leqq n-1$, enthalte mindestens $2^{q-1}+1$ Elemente. Dann existiert eine elementare (q,q)-Matrix E mit Koeffizienten in R derart, daß für alle Teilmengen J von $\{1,\dots,q\}$ und die aus den Spalten mit den Indizes $j \in J$ gebildete Teilmatrix Y'_J von YE gilt:*

$$\operatorname{ht}(I_{r'}(Y'_J)) \geqq \min\{n, (r-r'+1)(|J|-r'+1)\}.$$

$1 \leqq r' \leqq \min\{r, |J|\}$.

(2) *Es gilt die zu* (1) *analoge Aussage für „Grad“ anstelle von „Höhe“.*

(3) *Wenn R einen Koeffizientenbereich R' mit $1 \in R'$ enthält, können die Koeffizienten von E in R' gewählt werden.*

Beweis. Für (1) setzen wir $P := \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R : \operatorname{ht}(\mathfrak{p}) \leqq n-1\}$ und wählen als Dimensionsfunktion $\delta(\mathfrak{p}) := n-1-\operatorname{ht}(\mathfrak{p})$. Die Voraussetzung $\operatorname{ht}(I_r(Y)) \geqq n$ bedeutet: Der von den Spalten der Matrix Y erzeugte Untermodul N von $M = R^p$ ist bei allen $\mathfrak{p} \in P$ r-basisch in M. Die Behauptung $\operatorname{ht}(I_{r'}(Y'_J)) \geqq \min\{n, (r-r'+1)(|J|-r'+1)\}$ läßt sich übersetzen als: Der von den Spalten der Matrix YE mit den Indizes $j \in J$ erzeugte Untermodul ist bei allen Primidealen $\mathfrak{p} \in P$, $\delta(\mathfrak{p}) \geqq \delta(P) - (r-r'+1)$ $(|J|-r'+1)+1$, r'-basisch in M. Dies zeigt, daß Teil (1) eine Spezialisierung von (3.1) ist.

Das gleiche gilt für Teil (2), nur hat man hier $P = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R : \operatorname{t}(\mathfrak{p}) \leqq n-1\}$ und $\delta(\mathfrak{p}) = n-1-\operatorname{t}(\mathfrak{p})$ zu wählen und zu beachten, daß für Ideale $\mathfrak{a}$ von R gilt: $\operatorname{grad}(\mathfrak{a}) = \min\{\operatorname{t}(\mathfrak{p}) : \mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}\}$.

Satz (4.1) besitzt Vorläufer in [10], [15] ($r = r' = p \leqq q$) und [5] („$r + |J| - 2r' + 1$“ anstelle von „$(r-r'+1)(|J|-r'+1)$“). Wieder kann man auf die Anzahlbedingung für die Ringe $R/\mathfrak{p}$ verzichten, wenn man nur an den Teilmengen $J = \{1,\dots,j\}$ von $\{1,\dots,q\}$ interessiert ist. Die Anzahlbedingung ist ja ohnehin nur dann eine Einschränkung, wenn eines der vorkommenden Primideale ein maximales Ideal ist. Es ist klar, daß man in der Behauptung des Satzes (3.1) nicht q anstelle von r erwarten kann: In eine Abschätzung der Höhe oder des Grades nach unten kann nur eine Größe eingehen, die in etwa die „effektive“ Zeilenzahl beschreibt.

Literatur

1. Atiyah, M.F., Macdonald, I.F.: Introduction to commutative algebra. Reading (Mass.): Addison-Wesley 1969
2. Bass, H.: K-theory and stable algebra. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **22**, 5–60 (1964)
3. Bourbaki, N.: Algébre commutative. Ch. VII: Diviseurs. Paris: Hermann 1965
4. Bruns, W.: „Jede“ endliche freie Auflösung ist freie Auflösung eines von drei Elementen erzeugten Ideals. J. Algebra **39**, 429–439 (1976)

5. Bruns, W.: Zur Erzeugung von Moduln. Comm. Algebra **4**, 341–373 (1976)
6. Bruns, W.: Basische Elemente in Moduln über noetherschen Ringen. Habilitationsschrift. Technische Universität Clausthal 1976
7. Bruns, W.: Basische Elemente in Steinschen Moduln. Monatsh. Math. **85**, 283–295 (1978)
8. Eagon, J.A., Northcott, D.G.: Ideals defined by matrices and a certain complex associated with them. Proc. Roy. Soc. London Ser. A **269**, 188–204 (1962)
9. Eisenbud, D., Evans, E.G., Jr.: Generating modules efficiently: Theorems from algebraic K-theory. J. Algebra **27**, 278–305 (1973)
10. Eisenreich, G.: Zur Syzygientheorie und Theorie des inversen Systems perfekter Ideale und Vektormoduln in Polynomringen und Stellenringen. Sitzungsber. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig. Math.-Natur. Kl. **109**, (3) (1970)
11. Flenner, H.: Die Sätze von Bertini für lokale Ringe. Math. Ann. **229**, 97–111 (1977)
12. Forster, O.: Über die Anzahl der Erzeugenden eines Ideals in einem noetherschen Ring. Math. Z. **84**, 80–87 (1964)
13. Grothendieck, A.: Éléments de géometrie algébrique IV. Étude locale des schémas et des morphismes des schémas (séconde partie). Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **24** (1965)
14. Kronecker, L.: Grundzüge einer Theorie der algebraischen Größen. J. Reine Angew. Math. **92**, 1–123 (1882)
15. Lazard, D.: Suites régulières dans les ideaux déterminantiels. Comm. Algebra **4**, 327–340 (1976)
16. Serre, J.-P.: Modules projectifs et espaces fibrés à fibre vectorielle. Sem. Dubreil-Pisot 1957/58, Exp. 23. Paris: Faculté des Sciences de Paris, Secrétariat mathématique 1958
17. Swan, R.G.: The number of generators of a module. Math. Z. **102**, 318–322 (1967)
18. Wiegand, R.: Dimension functions on the prime spectrum. Comm. Algebra **3**, 459–480 (1975)

Eingegangen am 25. Juli 1979