ÜBER π UND SEINE BERECHNUNG

WINFRIED BRUNS

Jeder Schüler lernt in der Mittelsufe Formeln für den Flächeninhalt A und den Umfang U des Kreises mit Radius r, nämlich

$$A = \pi r^2, \qquad U = 2\pi r.$$

Dabei ist π eine neue Konstante, von der man vielleicht den Anfang der Dezimaldarstellung $3,14159\ldots$ kennt.

In der Ästethik ist der Kreis das vollendete geometrische Objekt schlechthin. Schon deshalb hat es die Mathematiker aller Zeiten herausgefordert, mehr über die geheimnisvolle Zahl π zu erfahren, sie in Beziehung zu anderen wichtigen Konstanten zu setzen, und sie insbesondere möglichst präzise zu bestimmen. Auch für Anwendungen in Naturwissenschaft und Technik muß man π hinreichend genau kennen. Diese Genauigkeit ist allerdings schon vor einigen Hundert Jahren erreicht worden.

Eine prinzielle Frage wollen wir gleich beantworten: π ist keine rationale Zahl, mit anderen Worten, π hat keine Darstellung der Form

$$\pi = \frac{r}{s} \qquad \text{mit ganzen Zahlen } r, s.$$

(1761 bewiesen von *Johann Heinrich Lambert*, 1728–1777). Also ist π *irrational*. Es gibt nicht einmal ein Polynom

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n+1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

mit *Brüchen* a_i als Koeffizienten, für das $p(\pi) = 0$ ist. Man sagt: π ist *transzendent* (1882 bewiesen von *Ferdinand Lindemann*, 1852–1939). Aus der Transzendenz folgt, daß π sich nicht mit Zirkel und Lineal konstruieren läßt, die „Quadratur" des Kreises also unmöglich ist.

Bereits die Irrationalität von π zeigt, daß wir π nicht als periodischen oder gar abbrechenden Dezimalbruch schreiben können. Bei der Bestimmung von π kann es also nur darum gehen, möglichst viele Dezimalstellen zu finden. „Genau" können wir π (in diesem Sinne) nicht ausrechnen.

Im September 1999 ist es dem japanischen Mathematiker Yasumasa Kanada gelungen, mehr als 200 Milliarden Dezimalstellen von π zu bestimmen, wobei die Rechenzeit auf einem sicherlich sehr leistungsfähigen Computer etwa 40 Stunden betragen hat.

Es wäre aber naiv zu glauben, daß dieser Rekord (vielleicht ist er inzwischen auch schon überboten) einzig und allein der Leistungsfähigkeit moderner Computer zu verdanken ist. Er ist ohne sie nicht vorstellbar, aber verdankt seine Existenz im gleichen Ausmaß der richtigen mathematische Methode und ihrer geschickten Umsetzung in ein effektives Rechenverfahren.

Wir wollen im folgenden die drei wesentlichen Stationen der Bestimmung von π näher beleuchten, nämlich das Verfahren des *Archimedes von Syrakus* (ca. 287–212 v. Chr.), die Berechnung mittels der Arcustangens-Potenzreihe und einen der modernen, seit ungefähr 25 Jahren bekannten Algorithmen. Die Arcustangens-Potenzreihe geht auf *James Gregory* (1637–1675) zurück, und das moderne Verfahren benutzt das arithmetisch-geometrische Mittel von *Carl Friedrich Gauß* (1777–1855).

1. Das Verfahren von Archimedes

Im Altertum waren folgende Näherungen bekannt:

Ägypten (Papyrus Rhind, ca. 1650 v. Chr.): $\pi \approx \frac{256}{81} \approx 3,16$
Babylon: $\pi \approx 3$
Bibel: $\pi \approx 3$ (1. Könige 7:23) (indirekt)

Als historische Anekdote sei erwähnt, daß noch im Jahre 1897 das Repräsentantenhaus des US-Bundesstaats Indiana einen Gesetzentwurf beschlossen hat, gemäß dem $\pi = 3,2$ ist. Dies ging auf eine göttliche Eingebung des Arztes Dr. E. J. Goodwin zurück, und der Staat Indiana erhoffte sich durch die gesetzliche Patentierung von π Lizenzeinnahmen aus dem Drucken von Schulbüchern in anderen Staaten. Der Gesetzentwurf wurde aber durch entschlossenes Eingreifen eines Professors der Purdue-Universität vor der endgültigen Verabschiedung im Senat gestoppt.

Archimedes ist der erste Mathematiker, von dem man weiß, daß er π auf systematische Weise schon sehr genau bestimmt hat. Bemerkenswert ist nicht nur die Berechnung selbst, sondern vor allem das Verfahren, das es prinzipiell erlaubt, π beliebig genau zu bestimmen. Archimedes nutzte die Beziehung zwischen den Seitenlängen des dem Kreis einbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks und des $2n$-Ecks und ebenso die entsprechende Beziehung für die umbeschriebenen Vielecke. Wir betrachten das einem Kreis mit Radius 1 einbeschriebene n-Eck und das einbeschreibene $2n$-Eck. Der Satz des Pythagoras

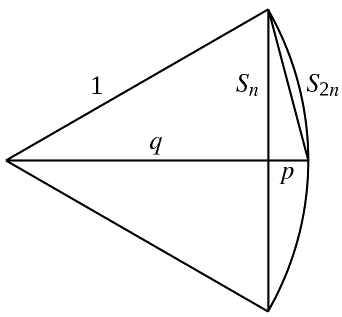

ABBILDUNG 1

liefert (siehe Abbildung 1):

$$S_{2n}^2 = \left(\frac{S_n}{2}\right)^2 + p^2, \qquad 1 = q^2 + \left(\frac{S_n}{2}\right)^2 \quad (q = 1 - p),$$

$$q = \sqrt{1 - \left(\frac{S_n}{2}\right)^2}, \qquad p = 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{S_n}{2}\right)^2}.$$

Daraus ergibt sich

$$S_{2n}^2 = \left(\frac{S_n}{2}\right)^2 + \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{S_n}{2}\right)^2}\right)^2 = 2 - 2\sqrt{1 - \left(\frac{S_n}{2}\right)^2}$$

Der Umfang des einbeschriebenen n-Ecks ist

$$I_n = n \cdot S_n.$$

Wenn wir zum Beispiel mit $n = 4$, $S_n = \sqrt{2}$, starten, so erhalten wir die Folge

$$I_4 < I_8 < I_{16} < I_{32} < \cdots$$

von der anschaulich klar ist, daß sie gegen 2π konvergiert. Wenn π noch nicht bekannt ist, können wir aber von dieser Folge noch nicht ablesen, wie gut π von I_{32} zum Beispiel angenähert wird. Dies war auch Archimedes klar, und er hat deshalb π zusätzlich von oben approximiert, und zwar mittels des Umfangs des umbeschriebenen n-Ecks.

Bezeichne t_n die *halbe* Länge der Seite des umbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks. Dann folgt mit dem Satz des Pythagoras leicht

$$t_{2n} = \frac{\sqrt{t_n^2 + 1} - 1}{t_n}.$$

Mit $A_n = 2nt_n$, und I_n ergibt sich dann eine Schachtelung für den Kreisumfang 2π, z. B.

$$I_4 < I_8 < I_{16} < I_{32} < \cdots < 2\pi < \cdots < A_{32} < A_{16} < A_8 < A_4.$$

Jeder Iterationsschritt bringt eine Verbesserung der Approximation. Wir sehen uns das Resultat für π in Tabelle 1 an, wobei die Iteration mit $S_4 = \sqrt{2}$, $t_4 = 1$ startet. In der

Untere Annäherung	Obere Annäherung	Intervall-länge	Verbesserungs-faktor
2.828427124	4.000000000	1.171572875	
3.061467458	3.313708499	0.252241040	4.644656059
3.121445152	3.182597878	0.061152725	4.124771818
3.136548490	3.151724907	0.015176416	4.029457433
3.140331157	3.144118385	0.003787228	4.007262228
3.141277250	3.142223629	0.000946379	4.001809267
3.141513801	3.141750369	0.000236568	4.000451925
3.141572940	3.141632080	0.000059140	4.000112956
3.141587725	3.141602510	0.000014784	4.000028237
3.141591421	3.141595117	0.000003696	4.000007059
3.141592345	3.141593269	0.000000924	4.000001764
3.141592576	3.141592807	0.000000231	4.000000441
3.141592634	3.141592692	0.000000057	4.000000110

TABELLE 1. Die Archimedische Näherung ausgehend vom 4-Eck

letzten Spalte der Tabelle haben wir das Verhältnis aufeinander folgender Differenzen

$$\frac{(A_{2^{m-1}} - I_{2^{m-1}})}{(A_{2^m} - I_{2^m})}$$

gebildet; $(A_{2^m} - I_{2^m})/2$ ist ja die Länge des Intervalls, in dem π sich aufhalten muß. Wir sehen, daß dieses Intervall sich bei jedem Schritt um etwa den Faktor 4 verkürzt. Dies läßt sich leicht beweisen, und wir kommen unten darauf zurück. Daher braucht man für die Verbesserung der Genauigkeit um eine Dezimalstelle ungefähr $1,6$ Rechenschritte, was das Verfahren für hohe Genauigkeit unbrauchbar macht. Die beste historische, mit der originalen Methode von Archimedes erzielte Näherung auf mehr als 30 Stellen stammt von *Ludolph van Ceulen* (1539–1619). Noch 1840 waren 34 Dezimalstellen auf seinem inzwischen verlorenen Grabstein in der Sankt-Pieters-Kerk in Leiden zu finden. Dieser Rekord hat bewirkt, daß π zumindest in Deutschland häufig als die „Ludolphsche Zahl“ bezeichnet wurde. (Die Methode von Archimedes wurde von anderen Mathematikern des 17. Jahrhunderts variiert und noch etwas verfeinert.)

Archimedes selbst ist mit $n = 6$, $S_6 = 1$, $t_6 = 1/\sqrt{3}$ gestartet, hat bis zum 96-Eck gerechnet und die Näherung

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$

erhalten. Beim Archimedischen (und anderen Verfahren) muß man Quadratwurzeln bestimmen, ein einfach zu lösendes Problem, auf das wir noch zurückkommen.

An dieser Stelle sind zwei wichtige Aspekte aller Näherungsverfahren zu nennen. Diese besitzen ihrer Natur gemäß einen

Verfahrensfehler.

Beim Archimedischen Verfahren haben wir ihn im Griff: Zum einen kennen wir stets ein Intervall, in dem π sich aufhält, zum anderen wissen wir sogar, wie sich dieses Intervall von Schritt zu Schritt verkleinert.

Bei der praktischen Rechnung ist man aber in der Regel auch gezwungen, Zwischenergebnisse gerundet darzustellen, wodurch sich

Rundungsfehler

in das Verfahren einschleichen. Gerade bei einem Problem wie der Berechnung von π muß man so runden, daß die geforderte Genauigkeit des Verfahrens nicht verlorengeht. Bei unseren Demonstrationsrechnungen behelfen wir uns damit, daß wir von vornherein die Stellenzahl genügend groß wählen.

Nicht unterschätzen sollte man die Möglichkeit eines Hardwarefehlers bei einer so exterem hohen Zahl an Rechenschritten, wie sie etwa für den geltenden π-Rekord notwendig sind. Daher, und zur Absicherung gegen Rundungsfehler, führt man stets zwei Berechnungen aus, möglichst mit unterschiedlichen Algorithmen oder wenigstens zwei Varianten des gleichen Algorithmus.

Mit ein wenig Trigonometrie sehen wir, daß Archimedes bei der Betrachtung des regelmäßigen n-Ecks die Ungleichung

$$n \sin\frac{\pi}{n} < \pi < n \tan\frac{\pi}{n}$$

ausnutzt. Die Entwicklungen von Sinus und Tangens in ihre Taylorreihen um 0 zeigen, daß $x - \sin x \approx x^3/6$ und $\tan x - x \approx x^3/3$ für genügend kleine $x > 0$. Der Fehler bei der Approximation von x durch $\sin x$ oder $\tan x$ verkleinert sich also beim Übergang von x zu $x/2$ etwa um den Faktor 8. Da man beim Archimedischen Verfahren aber den Faktor n gleichzeitg verdoppelt, verbessert sich die Genauigkeit (nur) um ungefähr den Faktor 4. Diese Überlegung beweist auch die Konvergenz des Verfahrens.

Ich möchte betonen, daß das Archimedische Verfahren bereits wichtige Prinzipien der modernen numerischen Mathematik berücksichtigt, nämlich:

- Es *konvergiert*, das heißt die Folge der sukzessiven Approximationen hat die zu bestimmende Zahl als Grenzwert.
- Es enthält eine *Fehlerabschätzung* durch Angabe einer unteren und einer oberen Näherung bei jedem Verfahrensschritt.
- Es beruht auf einer *Iteration*, bei der jeder Schritt nach dem gleichen Rechenverfahren durchgeführt wird.

Konvergenz ohne Fehlerabschätzung ist wertlos, weil man keine Aussage über die Güte der jeweils erreichten Annäherung machen kann, und nur Iterationsverfahren lassen sich in vernünftiger Weise auf Computern programmieren.

2. Die Arcustangens-Potenzreihe

Der Schlüssel zur Arcustangens-Potenzreihe ist die Gleichung

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt.$$

Diese Formel kann man direkt durch Ableiten von arctan überprüfen, wobei noch zu berücksichtigen ist, daß beide Seiten für $x = 0$ den Wert 0 ergeben. Für alle t mit $|t| < 1$ ist auch $|-t^2| = |t|^2 < 1$ und deshalb erhalten wir durch Einsetzen in die geometrische Reihe

$$\frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{1-(-t^2)} = \sum_{k=0}^{\infty}(-t^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k t^{2k}.$$

Die Potenzreihe darf auf ihrem Konvergenzintervall $-1 < t < 1$ gliedweise integriert werden, so daß

$$\begin{aligned}\arctan x &= \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k t^{2k}\right) dt = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_0^x (-1)^k t^{2k} dt\right)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1}, \quad |x| < 1.\end{aligned}$$

Zur Herleitung dieser Darstellung ist man aber nicht auf den Satz über die gliedweise Integration von Potenzreihen angewiesen, sondern kann elementarer argumentieren. Dabei ergibt sich außerdem eine gute Abschätzung für das Restglied. Diese zeigt, daß Potenzreihendarstellung von $\arctan x$ (im Gegensatz zur geometrischen Reihe) auch noch für $x = \pm 1$ gilt.

Wir betrachten dazu das Restglied der geometrischen Reihe,

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n} (-x^2)^k + R_n(x),$$

mit

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{1}{1+x^2} - \sum_{k=0}^{n} (-x^2)^k = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1-(-x^2)^{n+1}}{1+x^2} \\ &= (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Nun integrieren wir nur eine endliche Summe:

$$\begin{aligned} \arctan x &= \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int_0^x \sum_{k=0}^{n} (-t^2)^k\,dt + \int_0^x (-1)^{n+1} \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} + \tilde{R}_n(x). \end{aligned}$$

Dabei gilt für das Restglied $\tilde{R}_n(x)$ von arctan:

$$|\tilde{R}_n(x)| = \int_0^{|x|} \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt \le \int_0^{|x|} t^{2n+2}\,dt = \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}.$$

Für $|x| \le 1$ konvergiert dieses Restglied gegen 0, so daß in der Tat

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}, \qquad |x| \le 1.$$

(Da $1+t^2 \le 2$ für $0 \le t \le 1$, haben wir das Restglied um höchstens den Faktor 2 zu grob abgeschätzt.) Wenn wir $x = 1$ einsetzen, ergibt sich die berühmte *Leibnizsche Reihe*

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

(*Gottfried Wilhelm Leibniz*, 1646–1716). Diese Darstellung ist sicher die einfachste und schönste von π durch eine unendliche Reihe oder ein unendliches Produkt. Für die Berechnung ist sie aber wegen der außerordentlich langsamen Konvergenz ungeeignet.

Mit Hilfe eines Kunstgriffs läßt sich die Arcustangens-Reihe für die Bestimmung von π aber ausgezeichnet verwenden. Man benutzt die nach ihrem Entdecker *John Machin* (1680–1752) benannte Formel

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$$

oder Varianten davon. Wir verzichten darauf, die Machinsche Formel hier zu beweisen. Unter Verwendung des Additionstheorems

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

ist das eine sehr einfache Übungsaufgabe.

Machin selbst hat π im Jahr 1706 auf 100 Dezimalstellen bestimmt. Den Rekord für die Bestimmung von π ohne Einsatz mechanischer Hilfsmittel hat *William Shanks* im Jahr 1874 mit 527 korrekten Stellen (von 707 berechneten) aufgestellt. Die Genauigkeit von 1000 Stellen wurde 1949 unter Einsatz eines ENIAC-Computers erreicht (*George W. Reitwiesner*), 10.000 Stellen dann 1958 (*F. Genuys*, IBM 704), 100.000 Stellen schließlich 1961 (*Daniel Shanks* und *John W. Wrench, Jr.*, IBM 7090) und 1.000.000 Stellen im Jahr 1973 (*Guilloud* und *Boyer*, CDC 7600).

Der entscheidende Vorteil der Machinschen Formel gegenüber der Leibnizschen Reihe besteht darin, daß nun Werte x, $0 < x \leq 1/5$, in die Potenzreihe eingesetzt werden und das Restgliedverhalten von den schnell fallenden Potenzen von $1/5$ bestimmt wird. Für den Quotienten aufeinander folgender Restglieder erhalten wir

$$\left| \frac{\tilde{R}_{n+1}(x)}{\tilde{R}_n(x)} \right| \approx \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \cdot \frac{2n+1}{x^{2n+1}} \to x^2$$

Für $x = 1/5$ schrumpft der Fehler mit jedem Approximationsschritt etwa um den Faktor 25 (und für $x = 1/239$ um einen Faktor > 50.000). Dies ist der wesentliche Vorteil gegenüber dem Archimedischen Verfahren. Hinzu kommt eine erheblich einfachere Berechnung der verwendeten Terme. Insbesondere brauchen keine Quadratwurzeln gezogen zu werden. Einen Eindruck von der Güte dieser Methode gibt Tabelle 2.

Annäherung	Fehler	Verbesserungs-faktor
3.1832635983263598326	0.0416709447	
3.1405970293260603143	0.0009956242	41.85
3.1416210293250344250	0.0000283757	35.08
3.1415917721821772950	0.0000008814	32.19
3.1415926536235547620	$3.3761523532\ 10^{-11}$	30.58
3.1415926535886022286	$1.1910098004\ 10^{-12}$	29.56
3.1415926535898358474	$4.2609023057\ 10^{-14}$	28.86
3.1415926535897916969	$1.5415453637\ 10^{-15}$	28.34
3.1415926535897932947	$5.6284731474\ 10^{-17}$	27.95
3.1415926535897932363	$2.0708024386\ 10^{-18}$	27.64
3.1415926535897932385	$7.6681209392\ 10^{-20}$	27.38
3.1415926535897932384	$2.8552220150\ 10^{-21}$	27.18
3.1415926535897932384	$1.0682439598\ 10^{-22}$	27.00
3.1415926535897932384	$4.0134697137\ 10^{-24}$	26.85
3.1415926535897932384	$1.5134705812\ 10^{-25}$	26.72
3.1415926535897932384	$5.7260315556\ 10^{-27}$	26.61
3.1415926535897932384	$2.1727454044\ 10^{-28}$	26.51
3.1415926535897932384	$8.2663062778\ 10^{-30}$	26.43

TABELLE 2. Die Machinsche Näherung

Zum prinzipiellen Vergleich mit dem Archimedischen Verfahren kann man sagen, daß bei diesem die Ordnung der Näherung einer Funktion durch eine Potenzreihe stets gleich bleibt, aber das Argument x gegen den Entwicklungspunkt strebt, während bei der Arcustangens-Potenzreihe das Argument fest bleibt, während die Ordnung der Näherung ständig vergrößert wird.

Trotz der Leistungsfähigkeit der Arcustangens-Potenzreihe sollte man nicht übersehen, daß ihr Konvergenzverhalten wie bei Archimedes *linear* ist: die Anzahl der richtigen Dezimalstellen wächst bei jedem Näherungsschritt ungefähr mit einem festen Faktor. Dies kann entscheidend verbessert werden.

3. π UND DAS ARITHMETISCH-GEOMETRISCHE MITTEL

Kernpunkt des ersten Verfahrens zur Berechnung von π mit höherer Konvergenzordnung ist die von Gauß erforschte Iteration des arithmetischen und geometrischen Mittels. Für reelle Zahlen $a, b > 0$ heißt

$$\begin{aligned} &(a+b)/2 && \text{das \textit{arithmetische Mittel} von } a \text{ und } b,\\ &\sqrt{ab} && \text{das \textit{geometrische Mittel} von } a \text{ und } b. \end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned} \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab &= \frac{a^2}{4} + \frac{ab}{2} + \frac{b^2}{4} - ab = \frac{a^2}{4} - \frac{ab}{2} + \frac{b^2}{4}\\ &= \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Also gilt die Ungleichungskette

$$\min(a, b) \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \max(a, b).$$

Wir definieren nun rekursiv

$$\begin{aligned} a_0 &= a, & b_0 &= b,\\ a_{n+1} &= \frac{a_n + b_n}{2} & b_{n+1} &= \sqrt{a_n b_n}, \end{aligned}$$

und erhalten durch wiederholte Anwendung der Ungleichungskette

$$\min(a, b) \leq b_1 \leq b_2 \leq b_3 \leq \cdots \leq a_3 \leq a_2 \leq a_1 \leq \max(a, b)$$

Wir behaupten, daß die Folgen (a_i) und (b_i) gegen einen gemeinsamen Grenzwert

$$M(a, b)$$

konvergieren; $M(a, b)$ heißt *arithmetisch-geometrisches Mittel* von a und b (vor Gauß schon von *Joseph Louis Lagrange* (1736–1813) eingeführt).

Dazu betrachten wir die Differenz

$$c_{n+1} = \frac{a_n - b_n}{2} = a_n - a_{n+1}.$$

Beachte daß

$$2a_n = a_{n-1} + b_{n-1} \leq a_{n-1} + b_n$$

ist, also

$$a_n - b_n \leq a_{n-1} - a_n$$

Wegen $c_n = a_{n-1} - a_n$ erhalten wir

$$c_{n+1} = \frac{a_n - b_n}{2} \leq \frac{a_{n-1} - a_n}{2} = \frac{c_n}{2}.$$

Damit ist klar, daß (c_n) gegen 0 konvergiert, also

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n$$

gilt.

Die Konvergenz ist aber besser, als es die Ungleichung $c_{n+1} \leq c_n/2$ vermuten läßt – wir haben bisher die Definition von (b_n) auch kaum benutzt, sondern nur die Ungleichung $b_n \leq b_{n+1}$. Es ist

$$\begin{aligned} c_n^2 &= \frac{(a_{n-1} - b_{n-1})^2}{4} = \frac{(a_{n-1} + b_{n-1})^2}{4} - a_{n-1}b_{n-1} \\ &= a_n^2 - b_n^2 = (a_n + b_n)(a_n - b_n) = 2a_{n+1} \cdot 2c_{n+1} = 4a_{n+1}c_{n+1}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$a_n - b_n = 2c_{n+1} = \frac{c_n^2}{2a_{n+1}} = \frac{(a_{n-1} - b_{n-1})^2}{8a_{n+1}} \leq \frac{(a_{n-1} - b_{n-1})^2}{8M(a, b)}$$

Also ist die Länge des n-ten Schachtelungsintervalls in etwa proportional zum *Quadrat* der Länge des $(n-1)$-ten. Dies bedeutet: Bei jedem Iterationsschritt *verdoppelt* sich die Anzahl der gemeinsamen Dezimalstellen von a_n und b_n. Man spricht von *quadratischer Konvergenz*. Das Beispiel $a = 1$, $b = 1/\sqrt{2}$ wird durch Tabelle 3 illustriert.

Arithmetisches Mittel	Geometrisches Mittel	Intervall-länge	Quadratischer Verbess.-faktor
0.8535533905932737	0.8408964152537145	0.01265	6.77779
0.8472249029234941	0.8472012667468914	0.00002	6.77770
0.8472130848351928	0.8472130847527653	$8.24274\ 10^{-11}$	6.77770
0.8472130847939790	0.8472130847939790	$1.00244\ 10^{-21}$	6.77770
0.8472130847939790	0.8472130847939790	$1.48265\ 10^{-43}$	6.77770
0.8472130847939790	0.8472130847939790	$3.24336\ 10^{-87}$	6.77770
0.8472130847939790	0.8472130847939790	$1.55206\ 10^{-174}$	6.77770
0.8472130847939790	0.8472130847939790	$3.55415\ 10^{-349}$	6.77770
0.8472130847939790	0.8472130847939790	$1.86375\ 10^{-698}$	6.77770

TABELLE 3. Arithmetisch-geometrisches Mittel von 1 und $1/\sqrt{2}$

Es stellt sich jetzt natürlich die Frage, was dies alles mit π zu tun hat. Der Zusammenhang ergibt sich über die *elliptischen Integrale*

$$\begin{aligned} K(k) &= \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}, \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad 0 \le k < 1. \\ E(k) &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\, d\psi. \end{aligned}$$

Sie sind Funktionen von k. (Die Benutzung des Buchstabens k hat ausschließlich historische Gründe). Zumindest bei E kann man sehen, weshalb dieses „elliptisch“ genannt wird. Der Punkt

$$(\sqrt{1-k^2}\cos\psi, \sin\psi)$$

durchläuft die Ellipse mit den Halbachsen $\sqrt{1-k^2}$ und 1, wenn ψ von 0 bis 2π läuft, denn

$$\frac{(\sqrt{1-k^2}\cos\psi)^2}{1-k^2} + \frac{\sin^2\psi}{1} = 1.$$

(Beachte, daß $\cos^2\psi + \sin^2\psi = 1$.) Der Betrag der „Bahngeschwindigkeit“ an der Stelle ψ ist

$$\sqrt{(1-k^2)\sin^2\psi + \cos^2\psi} = \sqrt{1-k^2\sin^2\psi}.$$

Also ist $E(k)$ die Bogenlänge der Viertelellipse. Es gilt nun – und hier können wir nichts anderes tun, als uns auf die Erkenntnisse anderer zu berufen –

$$K(k) = \frac{\pi}{2M(1,\sqrt{1-k^2})}, \qquad E(k) = \frac{\pi}{4}\frac{Q(1,\sqrt{1-k^2})}{M(1,\sqrt{1-k^2})}$$

und

$$\frac{\pi}{2} = 2E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2.$$

Diese Gleichungen gehen auf Gauß, *Leonhard Euler* (1707 – 1783) und *Adrian Marie Legendre* (1752–1831) zurück. Einzig zu beschreiben ist noch Q. Es wird so definiert:

$$Q(a,b) = a^2 + b^2 - \sum_{n=1}^{\infty} 2^n c_n^2.$$

Zur Abkürzung setzen wir $M = M(1, 1/\sqrt{2})$ und $Q = Q(1, 1/\sqrt{2})$. Einsetzen in die Gleichung für $\pi/2$ liefert dann

$$\frac{\pi}{2} = 2\cdot\frac{\pi^2 Q}{8M^2} - \frac{\pi^2}{4M^2},$$

und Auflösen nach π ergibt

$$\pi = \frac{2M^2}{Q-1}.$$

Zur Bestimmung von π nähern wir sowohl Zähler als auch Nenner an,

$$2M^2 \approx 2a_n^2, \qquad Q - 1 \approx 1 + \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{n} 2^k c_k^2 - 1 = \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{n} 2^k c_k^2.$$

Wir verwenden also folgende Iteration

$$a_0 = 1, \qquad b_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad d_0 = \frac{1}{2},$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \qquad d_{n+1} = d_n - 2^{n+1}(a_n - a_{n+1})^2$$

und erhalten die Näherung

$$\pi \approx \frac{2a_n^2}{d_n}.$$

Dieses Verfahren haben *Richard P. Brent* und *Eugene Salamin* im Jahr 1976 unabhängig voneinander entdeckt.

Man kann zeigen, daß die Annäherung an π das gleiche Konvergenzverhalten hat wie die Iteration des arithmetischen und geometrischen Mittels, und dies wird durch die Numerik bestätigt, siehe Tabelle 4.

Näherung	Fehler	Quadratischer Verbess.-faktor
3.18767264271210862720	0.0460799891	
3.14168029329765329390	0.0000876397	24.22834
3.14159265389544649600	0.0000000003	25.12886
3.14159265358979323840	$3.7172194271\ 10^{-21}$	25.13274
3.14159265358979323840	$5.4978962078\ 10^{-43}$	25.13274
3.14159265358979323840	$1.2026886537\ 10^{-86}$	25.13274
3.14159265358979323840	$5.7552814656\ 10^{-174}$	25.13274
3.14159265358979323840	$1.3179328290\ 10^{-348}$	25.13274
3.14159265358979323840	$6.9110922921\ 10^{-698}$	25.13274
3.14159265358979323840	$1.9004372119\ 10^{-1396}$	25.13274
3.14159265358979323840	$1.4370344897\ 10^{-2793}$	25.13274
3.14159265358979323840	$8.2166449964\ 10^{-5588}$	25.13274
3.14159265358979323840	$2.6862670642\ 10^{-11176}$	25.13274

TABELLE 4. Näherung von π mit dem Verfahren von Brent und Salamin

Ausgehend von den numerischen Daten der Tabelle wollen wir grob abschätzen wieviele Schritte für eine Genauigkeit von 10^9 Dezimalstellen notwendig sind. Nach 13 Schritten haben wir eine Genauigkeit von 10^4 Stellen erreicht. Bei Verdoppelung der Stellenzahl in jedem Schritt braucht man bis 10^9 also

$$13 + \log_2(10^9/10^4) = 13 + \log_2(10^5) = 13 + 5\log_2(10) \approx 13 + 5 \cdot 3,3 \approx 30$$

Schritte. Inzwischen haben die kanadischen Mathematiker *Jonathan* und *Peter Borwein* Verfahren mit noch höherer Konvergenzgeschwindigkeit entwickelt. Einer ihrer Algorithmen erreicht mit nur 19 Iterationen den eingangs erwähnten Rekord von Kanada [sic!]. Grundlegende Ideen dafür stammen von dem indischen Mathematiker *Srinivasa Ramanujan* (1887–1920).

Trotz der geringen Zahl von Iterationen bleiben formidable Hürden zu überwinden, denn das Operieren mit Zahlen, die 10^9 oder mehr Dezimalstellen haben, ist extrem zeit- und speicheraufwendig. Wir wollen dies im nächsten Abschnitt noch kurz kommentieren.

4. Zur Arithmetik

Für die Division und das Ziehen von Quadratwurzeln benutzt man das Newtonsche Näherungsverfahren (*Isaac Newton*, 1643–1727). Zu einer Funktion f bestimmt es eine Nullstelle u mit folgender Iteration, ausgehend von einer groben Näherung u_0:

$$u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}.$$

Abgesehen von singulären Fällen hat es die oben beschriebene quadratische Konvergenz, wenn u_0 nahe genug bei u liegt.

Zur Bestimmung von $1/v$ wählt man die Funktion $f(x) = v - 1/x$. Dann ist $f'(x) = 1/x^2$, und die Iterationsvorschrift lautet

$$u_{n+1} = u_n - \left(v - \frac{1}{u_n}\right)u_n^2 = u_n - u_n(vu_n - 1).$$

Für $\sqrt{v}$ verwendet man $f(x) = x^2 - v$, $f'(x) = 2x$, und erhält

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{v}{u_n}\right).$$

(Auch hier sind arithmetisches und geometrisches Mittel sichtbar!) Damit haben wir alle Rechenoperationen, die in den Algorithmen für π auftreten, auf die Addition und die Multiplikation zurückgeführt.

Es ist klar, daß die Multiplikation dabei die wesentlich zeitaufwendigere Aufgabe ist. Für die Addition zweier n-stelliger Zahlen braucht man n Additionen einstelliger Zahlen (und das Bilden von Überträgen). Für die Multiplikation zweier solcher Zahlen sind nach der herkömmlichen Methode aber n^2 Multiplikationen notwendig (wozu noch zahlreiche Additionen kommen). Die Berechnung von π auf zum Beispiel 10^9 Stellen wäre unmöglich, wenn man wirklich auf die „Schulmultiplikation“ angewiesen wäre. Es gibt inzwischen aber effiziente Multiplikationsalgorithmen, die auf der sogenannten *schnellen Fourier-Transformation* beruhen und die Größenordnung des Rechenaufwandes bei der Multiplikation von n^2 auf die wesentlich langsamer wachsende Funktion $n \log n$ drücken.

Alle beschriebenen Algorithmen lassen sich sehr einfach programmieren. Die gängigen Programmiersprachen sind dazu aber ohne Erweiterungen nur begrenzt brauchbar, weil die in ihnen realisierte Genauigkeit der Gleitkommazahlen nicht ausreicht. Hierfür gibt es zwei Auswege:

(1) Man benutzt ein Computer-Algebra-System wie Maple, Mathematica, MuPAD oder das an Schulen verbreitete Derive. Die Rechenbeispiele in dieser Ausarbeitung sind mit dem kostenlosen, vor allem für Arithmetik geeigneten System Pari-GP gerechnet worden.

(2) Man verwendet Bibliotheken für hochgenaue Arithmetik. Diese gibt es vor allem für die Programmiersprache `C++`. Das Buch [2] gibt Hinweise dazu und die ihm beigefügte CD enthält unter anderem die Bibliothek `hfloat`.

LITERATUR

[1] G. Almkvist, B. Berndt, *Gauss, Landen, Ramanujan, the arithmetic-geometric mean, ellipses, π and the Ladies Diary*. Amer. Math. Monthly **95** (1988), 585–608. Ein sehr gut lesbarer Artikel, in dem insbesondere die Geschichte des arithmetisch-geometrischen Mittels beleuchtet wird. Er enthält auch Beweise für einige der benutzten Aussagen über elliptische Integrale.

[2] J. Arndt, Ch. Hähnel, *Pi – Algorithmen, Computer, Arithmetik*. 2. Auflage, Springer 2000. Mit CD-Rom, die sehr viele Programme zu π und zur Arithmetik mit hoher Genauigkeit. Mathematisch nicht anspruchsvoll.

[3] L. Berggren, J. Borwein, P. Borwein, *Pi: A source book*. Springer 1997. Dieses hervorragend zusammengestellte Buch enthält zahlreiche Quellen zu π und seiner Geschichte von 1650 v. Chr. bis 1996, beginnend mit dem Papyrus Rhind und Archimedes.

[4] O. Forster, *Algorithmische Zahlentheorie*. Vieweg 1996. Behandelt zwar π nicht, enthält aber eine sehr gute Darstellung der schnellen Fourier-Transformation und des Multiplikationsalgorithmus.

[5] U. Storch, H. Wiebe, *Lehrbuch der Mathematik*, Band I: Analysis einer Veränderlichen. 2. Auflage Spektrum 1996. Dieses ausgezeichnete Buch enthält alles an Mathematik, was wir benutzt haben, auch den Brent-Salamin-Algorithmus und die dafür erforderlichen elliptischen Integrale.

[6] Das Internet. Man findet schon zahlreiche Seiten zu π, wenn man etwa von `www.google.de` nach `Pi` suchen läßt. Auch [2] enthält viele Hinweise dazu. Eine Adresse soll hier wenigstens genannt werden: `http://www.joyofpi.com/`

UNIVERSITÄT OSNABRÜCK, FB MATHEMATIK/INFORMATIK, 49069 OSNABRÜCK
E-Mail: `Winfried.Bruns@mathematik.uni-osnabrueck.de`