Die Verallgemeinerung eines Satzes von Bourbaki und einige Anwendungen.
Bruns, Winfried; Vetter, Udo
pp. 317 - 326

manuscripta math. 17, 317 - 325 (1975)

DIE VERALLGEMEINERUNG EINES SATZES VON BOURBAKI UND EINIGE ANWENDUNGEN

Winfried Bruns und Udo Vetter

We generalize a theorem of Bourbaki: Let R be a noetherian ring and M a finitely generated torsionfree R-module with rank r. Assume further $M_{\mathfrak{p}}$ to be free for all $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ with depth $\mathfrak{p} \leq 1$. Then there exists a free submodule F in M such that M/F is isomorphic to an ideal in R. There are some applications due to E.G.Evans,Jr. and M. Auslander, concerning the group $K_o(R)$ resp. reflexive R-modules and - in case R is Gorenstein - R-modules of finite length.

0. In [5] konstruiert E.G.Evans,Jr. für normale noethersche Integritätsbereiche R ein Analogon zur Divisorenklassen-Gruppe von Dedekind-Ringen, dessen direkte Summe mit $\mathbb{Z}$ (wie im Fall der Dedekind-Ringe) isomorph ist zur Gruppe $K_o(R)$. Wichtigstes Argument ist dabei ein bekanntes Theorem von Bourbaki ([3], p.76). Ersetzt man dieses Argument durch eine in [4] enthaltene Verallgemeinerung (Abschnitt 1), dann bleiben die Überlegungen von Evans mutatis mutandis richtig für den Fall, daß R ein noetherscher Ring mit zusammenhängendem Spektrum ist. Wir skizzieren diesen Sachverhalt in Abschnitt 2.

Bei der erwähnten Verallgemeinerung des Bourbaki-Theorems wird die Forderung der Normalität für den zugrunde liegenden Ring ersetzt durch eine (zusätzliche) Forderung an den betrachteten Modul. Damit lassen sich u.a. die wichtigsten Sätze in einer Arbeit von Auslander (Theorem B und C in [1]) verallgemeinern, was im 3. Abschnitt festgehalten wird.

Zu den Bezeichnungen: Es sei R ein noetherscher Ring mit dem totalen Quotientenring Q(R) und M ein endlich erzeugter R-Modul. Ist die natürliche Abbildung $M \longrightarrow M \otimes_R Q(R)$ injektiv, dann heißt M torsionsfrei. Ist $M \otimes_R Q(R)$ ein freier Q(R)-Modul, so nennen wir die Anzahl der Elemente einer Basis dieses Moduls den Rang von M (vgl. hierzu [6], § 6). Die projektive (homologische) Dimension von M über R notieren wir mit $\mathrm{pd}_R M$. Für $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, R$ sei $\mu(M_{\mathfrak{p}})$ die Anzahl der Elemente eines minimalen Erzeugendensystems von $M_{\mathfrak{p}}$ über $R_{\mathfrak{p}}$. Mit $\mathrm{codh} M_{\mathfrak{p}}$ notieren wir die homologische Kodimension von $M_{\mathfrak{p}}$, speziell mit $t(\mathfrak{p})$ ("Tiefe von $\mathfrak{p}$") die von $R_{\mathfrak{p}}$. Es sei ferner für ein Ideal $\mathfrak{a} \neq R$ $\mathrm{grad}\,\mathfrak{a}$ die Länge einer maximalen in $\mathfrak{a}$ enthaltenen R-Primfolge. Man beachte, daß $\mathrm{grad}\,\mathfrak{a} = \min\{t(\mathfrak{p}) : \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, R, \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}\}$ gilt und $\mathfrak{a}$ im Falle $\mathfrak{a} \neq 0$ genau dann einen Rang besitzt, wenn $\mathrm{grad}\,\mathfrak{a} \geq 1$ ist.

1. Wir beginnen mit der Verallgemeinerung des Bourbaki-Theorems, wobei wir zusätzlich eine naheliegende Verallgemeinerung von Theorem 2.1,ii in [5] angeben. Man beachte, daß für einen endlich erzeugten, torsionsfreien Modul über einem normalen noetherschen Integritätsbereich die Lokalisierungen nach Primidealen einer Tiefe ≤ 1 stets frei sind.

SATZ 1. *Es sei R ein noetherscher Ring und M ein endlich erzeugter, torsionsfreier R-Modul mit einem Rang r. Ferner sei $M_{\mathfrak{p}}$ frei für alle Primideale $\mathfrak{p}$ von R mit $t(\mathfrak{p}) \leq 1$. Dann gilt:*

(1) *Es gibt einen freien Untermodul F von M, so daß M/F*

<u>zu einem Ideal von R isomorph ist.</u>

(2) <u>Ist</u> $\mathfrak{q}$ <u>ein Primideal in</u> R <u>mit</u> grad$\mathfrak{q} > 1$ <u>und</u> m <u>eine ganze Zahl mit</u> $\mu(M_{\mathfrak{q}})-r+1 \leq m \leq \mu(M_{\mathfrak{q}})$, <u>dann existiert ein freier Untermodul</u> F <u>von</u> M, <u>derart daß</u> M/F <u>zu einem Ideal von</u> R <u>isomorph ist und</u> $\mu(M/F)_{\mathfrak{q}} = m$ <u>gilt.</u>

<u>Beweis.</u> Den Beweis von (1) erhält man i.w. durch Spezialisierung des Beweises zu Satz 2 in [4]. Wie dort findet man bei $r > 1$ ein linear unabhängiges Element x in M, das für alle Primideale $\mathfrak{p}$ mit $t(\mathfrak{p}) \leq 1$ in eine Basis des freien $R_{\mathfrak{p}}$-Moduls $M_{\mathfrak{p}}$ aufgenommen werden kann. Aus den Voraussetzungen über M folgt insbesondere $\operatorname{codh} M_{\mathfrak{q}} \geq 1$ für alle $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} R$ mit $t(\mathfrak{q}) \geq 1$ und via der exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow R_{\mathfrak{q}}x \longrightarrow M_{\mathfrak{q}} \longrightarrow (M/Rx)_{\mathfrak{q}} \longrightarrow 0$$

insgesamt $\operatorname{codh}(M/Rx)_{\mathfrak{p}} \geq \min\{1, t(\mathfrak{p})\}$ für alle $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$. Folglich ist M/Rx ein torsionsfreier R-Modul des Ranges r-1, derart daß $(M/Rx)_{\mathfrak{p}}$ frei ist für alle Primideale $\mathfrak{p}$ von R mit $t(\mathfrak{p}) \leq 1$. Ein Induktionsargument beendet den Beweis von (1).

Beim Beweis von (2) folgen wir der Argumentation von Evans (Bew. von Theorem 2.1,ii in [5]). Wir zeigen: Ist $r > 1$ und $\mathfrak{q}$ ein Primideal in R mit grad$\mathfrak{q} > 1$, dann gibt es Elemente $x, x' \in M$, die jeweils für alle Primideale $\mathfrak{p}$ mit $t(\mathfrak{p}) \leq 1$ in eine Basis von $M_{\mathfrak{p}}$ aufgenommen werden können, für die ferner $\mu(M/Rx)_{\mathfrak{q}} = \mu(M_{\mathfrak{q}})$ bzw. $\mu(M/Rx')_{\mathfrak{q}} = \mu(M_{\mathfrak{q}})-1$ gilt.

Es ist $(\mathfrak{q}M)_{\mathfrak{p}} = M_{\mathfrak{p}}$ für alle $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ mit $t(\mathfrak{p}) \leq 1$. Nach Satz 1,(2) in [4] gibt es dann ein $x \in \mathfrak{q}M$, das für alle $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ mit $t(\mathfrak{p}) \leq 1$ in eine Basis von $M_{\mathfrak{p}}$ aufgenommen werden kann. Anwendung des Nakayama-Lemma ergibt $\mu(M/Rx)_{\mathfrak{q}} = \mu(M_{\mathfrak{q}})$. Ist y ein Element von M, das in ein minimales Erzeugendensystem von $M_{\mathfrak{q}}$ aufgenommen werden kann, dann erhält man durch Anwendung von Satz 1,(2) in [4] - mit $Ry + \mathfrak{q}M$ an Stelle von M' - ein Element $x' \in M$, das für alle $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ mit $t(\mathfrak{p}) \leq 1$ in eine Basis von $M_{\mathfrak{p}}$ aufgenommen werden kann und überdies modulo $\mathfrak{q}M$ zu y kongruent ist. Letzteres impliziert $\mu(M/Rx')_{\mathfrak{q}} = \mu(M_{\mathfrak{q}})-1$.

2. I.f. sei R ein noetherscher Ring und $\mathcal{P}$ die Menge aller Isomorphieklassen von endlich erzeugten, projektiven R-Moduln, die einen Rang besitzen. Die Elemente von $\mathcal{P}$ notieren wir mit $\langle P\rangle$, wobei P ein Repräsentant von $\langle P\rangle$ ist. Mit $K_0'(R)$ bezeichnen wir die freie abelsche Gruppe über $\mathcal{P}$ modulo der von allen Elementen der Form $\langle P+Q\rangle - \langle P\rangle - \langle Q\rangle$ erzeugten Untergruppe. Hat R ein zusammenhängendes Spektrum, dann ist $K_0'(R) = K_0(R)$ (s. etwa [2], (7.1), p.127).

Die Zuordnung

$$\langle P\rangle \longmapsto \text{Rang von } P,$$

$\langle P\rangle \in \mathcal{P}$, induziert einen Epimorphismus von $K_0'(R)$ auf $\mathbb{Z}$, dessen Kern wir mit $\widetilde{K_0'}(R)$ bezeichnen. Wir werden $\widetilde{K_0'}(R)$ als Gruppe von Äquivalenzklassen gewisser Ideale in R interpretieren. Dabei folgen wir exakt der Konstruktion von Evans in [5].

DEFINITION. Zwei Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ von R mit positivem Rang heissen äquivalent, $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b}$, wenn ein endlich erzeugter R-Modul M mit freien Untermoduln F und G existiert, derart daß M/F zu $\mathfrak{a}$ und M/G zu $\mathfrak{b}$ isomorph ist.

ANMERKUNGEN

1. Sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ projektive Ideale in R, dann ist $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b}$ gleichbedeutend mit $\mathfrak{a} \cong \mathfrak{b}$: Bei $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b}$ hat man $\mathfrak{a} \oplus F = \mathfrak{b} \oplus G$ mit

freien R-Moduln F und G des gleichen Ranges r; es folgt $\mathfrak{a} \cong {}^{r+1}\bigwedge(\mathfrak{a}\oplus F) \cong {}^{r+1}\bigwedge(\mathfrak{b}\oplus G) \cong \mathfrak{b}$.

2. (Vgl. hierzu Corollary 2.2 in [5].) Gibt es in R ein Primideal eines Grades >1, dann ist die Relation $\sim$ in der Menge aller Ideale von R mit positivem Rang (echt) gröber als die Isomorphie. Dies folgt sofort aus Satz 1,(2).

3. Die Relation $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation. Der (einfache) Beweis unterscheidet sich nicht von dem zu Lemma 3.1 in [5]. Bei Dedekindringen stimmen nach 1. die Äquivalenzklassen bzgl. $\sim$ mit den Idealklassen überein.-

Mit $\mathfrak{J}$ bezeichnen wir die Menge aller Ideale $\mathfrak{a}$ von R mit positivem Rang und der Eigenschaft, daß $\mathfrak{a}R_{\mathfrak{p}}$ für alle $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ mit $t(\mathfrak{p}) \leq 1$ ein Hauptideal ist. Ist $\mathfrak{a} \in \mathfrak{J}$ und gilt $\mathfrak{b} \sim \mathfrak{a}$ für ein Ideal $\mathfrak{b}$ von R, dann hat man offenbar $\mathfrak{b} \in \mathfrak{J}$.

Sind $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathfrak{J}$, dann erfüllt der R-Modul $\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{b}$ die Voraussetzungen von Satz 1. Es gibt also einen freien Untermodul F des Ranges 1 von $\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{b}$, so daß $(\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{b})/F$ zu einem Ideal $\mathfrak{c}$ von R isomorph ist. Natürlich hat man $\mathfrak{c} \in \mathfrak{J}$. Überdies hängt die Äquivalenzklasse von $\mathfrak{c}$ nicht ab von den Repräsentanten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ der Äquivalenzklassen von $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{b}$ (vgl. Lemma 3.2 in [5]). Bezeichnen wir allgemein mit $\bar{\mathfrak{i}}$ die Äquivalenzklasse des Ideals $\mathfrak{i} \in \mathfrak{J}$, dann wird durch

$$\bar{\mathfrak{a}} + \bar{\mathfrak{b}} := \bar{\mathfrak{c}}$$

eine Addition in der Menge aller Äquivalenzklassen der Elemente von $\mathfrak{J}$ definiert. Diese Addition ist offenbar assoziativ und kommutativ und und hat $\bar{R}$ als neutrales Element. Wie in [5] (Lemma 3.3) beweist man:

<u>LEMMA. Die Äquivalenzklasse $\bar{\mathfrak{a}}$ ist genau dann invertierbar,</u>

wenn für ein $\mathfrak{b}\in\bar{\mathfrak{a}}$ (und damit für alle $\mathfrak{b}\in\bar{\mathfrak{a}}$) gilt: $\mathrm{pd}_R\mathfrak{b}\leqslant 1$. Enthält R ein Primideal eines Grades >1, dann gibt es in jeder invertierbaren Äquivalenzklasse einen Repräsentanten der projektiven Dimension 1.

Ist R ein Dedekind-Ring, dann bilden die Äquivalenzklassen bzgl. $\sim$ mit der oben definierten Addition eine Gruppe, die zur Idealklassen-Gruppe isomorph ist. Es gilt allgemein:

SATZ 2. Die Gruppe der invertierbaren Äquivalenzklassen von Elementen aus $\mathfrak{J}$ ist isomorph zu $\widetilde{K'_0(R)}$.

Da der Beweis dieses Satzes sich nicht von dem des Lemma 3.4 in [5] unterscheidet, beschränken wir uns auf die Angabe der die Isomorphie vermittelnden Abbildung f: Es sei $\mathfrak{a}\in\mathfrak{J}$ mit $\mathrm{pd}_R\mathfrak{a}\leqslant 1$. Dann ist $f(\bar{\mathfrak{a}})$ die Restklasse von $\langle P\rangle - \langle F\oplus R\rangle$ in $K'_0(R)$, wobei $0\longrightarrow F\longrightarrow P\longrightarrow\mathfrak{a}\longrightarrow 0$ eine exakte Sequenz mit einem endlich erzeugten, projektiven R-Modul P und einem freien R-Modul F ist.

3. Wir verallgemeinern zunächst Theorem B aus [1]:

SATZ 3. Es sei R ein noetherscher Ring. Dann gilt:

(1) Zu jedem endlich erzeugten, reflexiven R-Modul M mit Rang, bei dem $M_{\mathfrak{p}}$ frei ist für alle Primideale $\mathfrak{p}$ von R mit $t(\mathfrak{p})\leqslant 1$, gibt es einen freien Untermodul F derart, daß M/F zu einem Ideal $\mathfrak{a}$ von R isomorph ist, dessen assoziierte Primideale höchstens die Tiefe 2 haben.

(2) Es sei N ein endlich erzeugter R-Modul mit Rang derart, daß $N_{\mathfrak{p}}$ endliche projektive Dimension über $R_{\mathfrak{p}}$ hat für alle Primideale $\mathfrak{p}$ von R mit $t(\mathfrak{p})\leqslant 1$. Dann gibt es ein Ideal $\mathfrak{b}$ in R mit folgenden Eigenschaften:

(a) *Es ist* $t(\mathfrak{q}) \leq 2$ *für alle assoziierten Primideale* $\mathfrak{q}$ *von* $\mathfrak{b}$.

(b) *Man hat exakte Funktor-Sequenzen*

$$\operatorname{Ext}_R^1(\mathfrak{b},\ ) \longrightarrow \operatorname{Ext}_R^3(N,\ ) \longrightarrow 0$$

und

$$0 \longrightarrow \operatorname{Tor}_3^R(N,\ ) \longrightarrow \operatorname{Tor}_1^R(\mathfrak{b},\ ).$$

(c) *Für jedes* $i \geq 2$ *hat man Funktor-Isomorphismen*

$$\operatorname{Ext}_R^i(\mathfrak{b},\ ) \cong \operatorname{Ext}_R^{i+2}(N,\ ) \quad \text{und} \quad \operatorname{Tor}_i^R(\mathfrak{b},\ ) \cong \operatorname{Tor}_{i+2}^R(N,\ ).$$

Bei der Übertragung des Beweises von Auslander hat man zu beachten, daß die dort geforderte Normalität von R nur für die Anwendung des Bourbaki-Theorems wesentlich ist. Ferner haben wir die Voraussetzung "R Cohen-Macaulay-Ring" dadurch umgangen, daß wir überall die Höhe von Primidealen durch ihre Tiefe ersetzt haben. Man beachte schließlich, daß die Bedingungen (c) und (d) von Lemma 2 aus [1] für den Modul M aus der exakten Sequenz $0 \to M \to F_1 \to F_0 \to N \to 0$ unter unseren Voraussetzungen äquivalent sind.-

Dem Corollary 5 aus [1] entspricht nun die

FOLGERUNG. Es sei R *ein noetherscher Ring. Jedes Ideal von* R, *dessen assoziierte Primideale höchstens die Tiefe* 2 *haben, besitze endliche projektive Dimension. Dann ist* R *regulär, d.h.* $R_{\mathfrak{q}}$ *ist ein regulärer lokaler Ring für alle Primideale* $\mathfrak{q}$ *von* R.

Beim Beweis der Folgerung ist zu beachten, daß die Voraussetzung unmittelbar impliziert, daß $R_{\mathfrak{q}}$ ein regulärer lokaler Ring ist für alle $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} R$ mit $t(\mathfrak{q}) \leq 2$. Deshalb läßt sich Satz 3,(2) auf jeden endlich erzeugten R-Modul N mit Rang anwenden, speziell auf alle Primideale von R, die einen Rang besitzen. Es genügt daher zu zeigen: Für jedes Primideal $\mathfrak{q}$ von R mit $t(\mathfrak{q}) \geq 1$ gilt grad $\mathfrak{q} \geq 1$. Wegen grad $\mathfrak{q}$ $= \min\{t(\mathfrak{p}) : \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R, \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{q}\}$ folgt aus grad $\mathfrak{q} < 1$ mit der Voraussetzung sofort $t(\mathfrak{q}) < 1$.-

Bei der folgenden Verallgemeinerung von Theorem C aus [1] können wir die dort gemachte Voraussetzung der Normalität ersatzlos streichen, da die Voraussetzungen über M es ermöglichen, Satz 1 auf einen ersten Syzygienmodul von M anzuwenden. Im übrigen ist der Beweis von Auslander zu kopieren.

SATZ 4. *Es sei R ein Gorensteinring, dessen maximale Ideale alle eine Höhe ≥ 2 besitzen. Dann kann man jeden R-Modul endlicher Länge in einen zyklischen Modul endlicher Länge einbetten, der wesentliche Erweiterung von M ist.*

Literatur

[1] AUSLANDER, M.: Remarks on a Theorem of Bourbaki. Nagoya Math. J. 27, 361-369 (1966)

[2] BASS, H.: Algebraic K-Theory, New York, Benjamin 1968

[3] BOURBAKI, N.: Algèbre Commutative, Chap. 7, Diviseurs. Paris, Hermann 1965

[4] BRUNS, W.: "Jede" endliche freie Auflösung ist freie Auflösung eines von drei Elementen erzeugten Ideals. Erscheint demnächst in J. Algebra

[5] EVANS, E.G., Jr.: Bourbaki's Theorem and Algebraic K-Theory. Erscheint demnächst in J. Algebra

[6] SCHEJA, G., STORCH, U.: Differentielle Eigenschaften der Lokalisierungen analytischer Algebren. Math. Ann. 197, 137-170 (1972)

Winfried Bruns

Udo Vetter

Institut für Mathematik
der Technischen Universität

D-3392 Clausthal-Zellerfeld

Erzstr. 1

(Eingegangen am 23. Juni 1975)