JOURNAL OF ALGEBRA 39, 429–439 (1976)

"Jede" endliche freie Auflösung ist freie Auflösung eines von drei Elementen erzeugten Ideals

WINFRIED BRUNS

Institut für Mathematik der Technischen Universität, BRD-3392 Clausthal-Zellerfeld, Erzstrasse 1

Communicated by D. Buchsbaum

Received December 13, 1974

EINLEITUNG

Burch und Kohn haben in [4] bzw. [7] folgendes bewiesen: R sei ein kommutativer noetherscher Ring und n eine natürliche Zahl, die homologische Dimension eines torsionslosen R-Moduls ist; dann existiert ein von höchstens drei Elementen erzeugtes Ideal in R, dessen homologische Dimension gleich n ist. Buchsbaum und Eisenbud [3, p. 135, Conjecture, vgl. auch Theorem 7.2] vermuten sogar, "jede" endliche freie Auflösung sei freie Auflösung eines solchen Ideals. Wir wollen diese Vermutung im Rahmen des folgenden allgemeineren Resultats beweisen:

$$0 \to F_n \xrightarrow{f_n} F_{n-1} \to \cdots \to F_{m+1} \xrightarrow{f_{m+1}} F_m \to M \to 0$$

sei eine projektive Auflösung von M, F_m ein freier R-Modul und M ein m-torsionsloser R-Modul (oder äquivalent: ein m-ter Syzygienmodul), der einen Rang besitzt, ferner sei $r := \text{rang Bild } f_{m+1}$; dann existieren Homomorphismen

$$c: F_m \to R^{r+m}, \quad f_m: R^{r+m} \to R^{2m-1}, \quad f_j: R^{2j+1} \to R^{2j-1}, \quad j = 1,\ldots, m-1$$

derart, daß mit $f'_{m+1} := c \circ f_{m+1}$ die Sequenz

$$0 \to F_n \xrightarrow{f_n} F_{n-1} \to \cdots \to F_{m+2} \xrightarrow{f_{m+2}} F_{m+1} \xrightarrow{f'_{m+1}} R^{r+m}$$
$$\xrightarrow{f_m} R^{2m-1} \to \cdots \to R^5 \xrightarrow{f_2} R^3 \xrightarrow{f_1} R$$

exakt ist (Satz 3). Für $m = 2$ (und freie Moduln F_k, $k = 2,\ldots, n$) ist dies die Vermutung von Buchsbaum und Eisenbud.

481/39/2-7

Aus dem soeben genannten Ergebnis folgt: Jede natürliche Zahl, die homologische Dimension eines m-torsionslosen R-Moduls sein kann, ist homologische Dimension eines von höchstens $2m + 1$ Elementen erzeugten m-torsionslosen R-Moduls des Ranges m (Korollar zu Satz 3).

Die Konstruktion von c und der f_i (Korollar 1 zu Satz 2) gelingt mit folgendem Schluß (Satz 2): Ist M ein m-torsionsloser R-Modul endlicher homologischer Dimension, der einen Rang $r > m$ besitzt und $g: R^n \to M$ ein Epimorphismus, so existiert ein Basiselement $x \in R^n$, für das $M/Rg(x)$ m-torsionslos und vom Rang $r - 1$ ist. Letzteres hängt einzig davon ab, ob $g(x)$ für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ von R, bei dem die homologische Kodimension (Tiefe) von $R_\mathfrak{p}$ höchstens m beträgt, in eine Basis des (für solche Primideale) freien $R_\mathfrak{p}$-Moduls $M_\mathfrak{p}$ aufgenommen werden kann. Aussagen über die Existenz solcher Elemente $x \in R^n$, allerdings in Abhängigkeit von der Krulldimension der Ringe $R/\mathfrak{p}$, haben Eisenbud und Evans in [5, Theorem A] gemacht. Wit beweisen ein Analogon, in dem an die Stelle der Krulldimension von $R/\mathfrak{p}$ die Differenz zwischen m und der homologischen Kodimension von $R_\mathfrak{p}$ tritt (Satz 1).

Man kann bei der im vorhergehenden Absatz genannten Aussage die Voraussetzung über die homologische Dimension von M ersetzen durch die Forderung nach Regularität der Ringe $R_\mathfrak{p}$, deren homologische Kodimension $\leqq m$ ist. Für solche Ringe R erhält man als Verallgemeinerung eines Theorems von Bourbaki [2, p. 76, Théorème 6]: Ein m-torsionsloser R-Modul, der einen Rang $\geqq m$ besitzt, ist Erweiterung eines m-torsionslosen R-Moduls des Ranges m durch einen freien R-Modul (Korollar 2 zu Satz 2).

Wir erläutern nun einige der verwendeten Begriffe und Bezeichnungen. R ist stets ein kommutativer noetherscher Ring, alle vorkommenden R-Moduln $M, N, \ldots$ sind endliche erzeugt. Sei $Q(R)$ der totale Quotientenring von R. Ist $M \otimes_R Q(R)$ ein freier $Q(R)$-Modul, so heißt die Anzahl der Elemente einer Basis von $M \otimes_R Q(R)$ der Rang von M, abgekürzt rang M; wichtig ist: Besitzen zwei der R-Moduln in einer kurzen exakten Sequenz einen Rang, so hat auch der dritte einen Rang (vgl. [9, §6]). Die homologische Dimension von M über R notieren wir mit dh M, die homologische Kodimension mit codh M und bei lokalem R mit $\mu(M)$ die wohlbestimmte Anzahl der Elemente eines minimalen Erzeugendensystem von M. Ass(M) ist die (endliche) Menge der zu M assoziierten Primideale. Den Grad eines Ideals $\mathfrak{a}$ (bezüglich R) bezeichnen wir mit grad $\mathfrak{a}$; es gilt grad $\mathfrak{a} = \min\{\operatorname{codh} R_\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}\}$. Der Bequemlichkeit halber führen wir noch folgende Bezeichnung ein: $\mathfrak{C}_n$ ist die Menge derjenigen Primideale $\mathfrak{p}$ von R, für die codh $R_\mathfrak{p} \leqq n$ ist.

Wir wollen auf den Begriff "m-torsionslos" etwas ausführlicher eingehen. $F_1 \to F_0 \to M \to 0$ sei eine projektive Darstellung von M und $D(M)$ der Kokern des Duals des Homomorphismus $F_1 \to F_0$. $\operatorname{Ext}_R{}^i(D(M), R)$ hängt für $i \geqq 1$ nur von M ab. Deshalb ist es sinnvoll zu sagen, M sei *m-torsionslos*, wenn $\mathrm{Ext}_R{}^i(D(M), R) = 0$ ist für $i = 1,\ldots, m$ [1]. Diese Namensgebung beruht darauf, daß $\mathrm{Ext}_R{}^1(D(M), R)$ Kern und $\mathrm{Ext}_R{}^2(D(M), R)$ Kokern des natürlichen Homomorphismus von M in sein Bidual ist. M ist also 1-torsionslos (2-torsionslos), wenn M im üblichen Sinne torsionslos (reflexiv) ist. Bei $\mathrm{dh}\, M < \infty$ läßt sich m-Torsionslosigkeit auch durch andere Aussagen beschreiben; es sind dann äquivalent [1, Theorem (4.25)]:

($\mathrm{a_m}$) Jede R-Primfolge aus höchstens m Elementen ist eine M-Primfolge (bei $m = 1$: M ist *torsionsfrei*),

($\mathrm{b_m}$) $\mathrm{codh}\, M_\mathfrak{p} \geqq \min(m, \mathrm{codh}\, R_\mathfrak{p})$ für alle Primideale $\mathfrak{p}$ von R,

($\mathrm{s_m}$) M ist ein *m-ter Syzygienmodul*, d.h. es gibt eine exakte Sequenz $0 \to M \to P_m \to P_{m-1} \to \cdots \to P_1$ mit projektiven R-Moduln P_i,

($\mathrm{t_m}$) M is m-torsionslos.

Diese Eigenschaften von M sind unabhängig von $\mathrm{dh}\, M$ auch dann äquivalent, wenn für alle Primideale $\mathfrak{p} \in \mathfrak{C}_{m-1}$ die Lokalisierung $R_\mathfrak{p}$ ein Gorensteinring ist [6, Satz 4.6]; R wird dann als *m-Gorensteinring* bezeichnet. Im Rahmen unserer Untersuchungen sind als m-Gorensteinringe nur solche Ringe von Interesse, bei denen die Ringe $R_\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p} \in \mathfrak{C}_{m-1}$, sogar reguläre lokale Ringe sind.

Zur Formulierung von Satz 1 verwenden wir den Begriff "s-basisch": Ein Untermodul M' von M heißt *s-basisch* (in M) bei dem Primideal $\mathfrak{p}$, wenn $\mu(M/M')_\mathfrak{p} \leqq \mu(M_\mathfrak{p}) - s$ ist. $x \in M$ heißt basisch (in M) bei $\mathfrak{p}$, wenn Rx 1-basisch in M bei $\mathfrak{p}$ ist. Beim Beweis von Satz 1 ist wichtig, daß sich die Menge der Primideale von R, für die $\mu(M_\mathfrak{p}) > n$ ist, als Varietät eines Ideals von R beschreiben läßt: $\mathrm{I}_n(M)$ sei die Summe der Annullatorideale von M nach seinen von höchstens n Elementen erzeugten Untermoduln; dann ist $\mu(M_\mathfrak{p}) > n$ äquivalent zu $\mathfrak{p} \supset \mathrm{I}_n(M)$.

1. Zur Existenz basischer Elemente

Grundlage unserer Untersuchungen ist der in diesem Abschnitt bewiesene Satz 1. Er garantiert (unter gewissen Voraussetzungen) die Existenz eines bei allen $\mathfrak{p} \in \mathfrak{C}_m$ basischen Elementes y in M, das wir benötigen, um von einem m-torsionslosen R-Modul M zu einem m-torsionslosen R-Modul M/Ry übergehen zu können. Satz 1 ist ein Analogon zu [5, Theorem A]: wir ersetzen darin die Krulldimension von $R/\mathfrak{p}$ durch eine unseren Anwendungen angepaßte Invariante von $\mathfrak{p}$ (zu den außerdem vorgenommenen Spezialisierungen vgl. man die Anmerkung 1 am Ende des Beweises von Satz 1). Dabei ist eine zusätzliche Voraussetzung über M in Kauf zu nehmen:

SATZ 1. *M sei ein R-Modul und $n \geqq 0$ eine natürliche Zahl derart, daß für Primideale $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \mathfrak{C}_n$ aus* $\operatorname{codh} R_\mathfrak{p} > \operatorname{codh} R_\mathfrak{q}$ *stets $\mu(M_\mathfrak{p}) \geqq \mu(M_\mathfrak{q})$ folgt. Dann gilt:*

(1) *Ist $\mu(M_\mathfrak{p}) > n$ für alle Primideale $\mathfrak{p} \in \mathfrak{C}_n$, so existiert ein $x \in M$, das bei allen $\mathfrak{p} \in \mathfrak{C}_n$ basisch in M ist.*

(2) *Seien $x_1, \ldots, x_k \in M$, $k \geqq 1$ und $M' := \sum_{i=1}^k Rx_i$. Wenn M' bei allen $\mathfrak{p} \in \mathfrak{C}_n$* $\min(k, n+1\text{-}\operatorname{codh} R_\mathfrak{p})$*-basisch ist in M, existiert ein $x' \in \sum_{i=2}^k Rx_i$ derart, daß $x_1 + x'$ bei allen $\mathfrak{p} \in \mathfrak{C}_n$ in M basisch ist.*

Wir können den Beweis von [5, Theorem A] weitgehend übernehmen, haben jedoch die Anwendung von [5, Lemma 4] durch eine andere Schlußweise zu ersetzen:

HILFSSATZ. *$\mathfrak{a}$ sei ein Ideal von R. Dann existieren nur endlich viele Primideale $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}$ mit* $\operatorname{codh} R_\mathfrak{p} = \operatorname{grad} \mathfrak{a}$.

Beweis. Der Fall $\mathfrak{a} = R$ ist trivial. Im anderen Fall sei $x_1, \ldots, x_n$, $n = \operatorname{grad} \mathfrak{a}$, eine in $\mathfrak{a}$ enthaltene R-Primfolge. Für jedes $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}$ ist $x_1, \ldots, x_n$ auch eine $R_\mathfrak{p}$-Primfolge und es gilt bei $\operatorname{codh} R_\mathfrak{p} = n$:

$$\operatorname{codh}(R/Rx_1 + \cdots + Rx_n)_\mathfrak{p} = \operatorname{codh} R_\mathfrak{p}/R_\mathfrak{p}x_1 + \cdots + R_\mathfrak{p}x_n = 0.$$

Mithin ist $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(R/Rx_1 + \cdots + Rx_n)$. $\operatorname{Ass}(R/Rx_1 + \cdots + Rx_n)$ ist eine endliche Menge.

Beweis des Satzes 1. (1) folgt aus (2), wenn man $x_1, \ldots, x_k$ als irgendein Erzeugendensystem von M wählt. (2) wird durch Induktion über k bewiesen. Der Fall $k = 1$ ist trivial. Es genügt also, bei $k > 1$ zu zeigen, daß $a_1, \ldots, a_{k-1} \in R$ existieren, für die gilt: $M'' := R(x_1 + a_1x_k) + \sum_{i=2}^{k-1} R(x_i + a_ix_k)$ ist $\min(k-1, n+1-\operatorname{codh} R_\mathfrak{p})$-basisch in M bei allen $\mathfrak{p} \in \mathfrak{C}_n$.

Wir zeigen zunächst, daß es nur endlich viele $\mathfrak{p} \in \mathfrak{C}_n$ gibt, bei denen M' nicht $\min(k, n+2-\operatorname{codh} R_\mathfrak{p})$-basisch ist, bei denen also

$$\mu(M/M')_\mathfrak{p} > \mu(M_\mathfrak{p}) - \min(k, n+2-\operatorname{codh} R_\mathfrak{p})$$

ist. Es genügt, dies für festes $t := \operatorname{codh} R_\mathfrak{p}$ und festes $s := \mu(M_\mathfrak{p}) - \min(k, n+2-t)$ zu beweisen, da für s und t nur endlich viele Werte in Frage kommen. Für jedes $\mathfrak{q} \in \mathfrak{C}_n$ mit $\operatorname{codh} R_\mathfrak{q} < t$ erhalten wir die Abschätzung

$$\begin{aligned}\mu(M/M')_\mathfrak{q} &\leqq \mu(M_\mathfrak{q}) - \min(k, n+1-\operatorname{codh} R_\mathfrak{q})\\ &\leqq \mu(M_\mathfrak{q}) - \min(k, n+2-t)\\ &\leqq s,\end{aligned}$$

denn für alle $\mathfrak{p} \in \mathfrak{C}_n$ mit codh $R_\mathfrak{p} = t$ hat man nach Voraussetzung $\mu(M_\mathfrak{q}) \leqq \mu(M_\mathfrak{p})$. Mithin umfaßt $\mathfrak{q}$ das Ideal $\mathrm{I}_s(M/M')$ nicht, und es ergibt sich grad $\mathrm{I}_s(M/M') \geqq t$. Bei grad $\mathrm{I}_s(M/M') > t$ existiert überhaupt kein Primideal $\mathfrak{p}$, codh $R_\mathfrak{p} = t$, in dem $\mathrm{I}_s(M/M')$ enthalten ist, bei grad $\mathrm{I}_s(M/M') = t$ aber auch nur endlich viele, wie der obige Hilfssatz zeigt.

Sei nun E die endliche Menge derjenigen $\mathfrak{p} \in \mathfrak{C}_n$, bei denen M' nicht $\min(k, n + 2 - \operatorname{codh} R_\mathfrak{p})$-basisch in M ist. Nach [5, Lemma 3] existieren $a_1, \ldots, a_{k-1} \in R$ derart, daß $M'' := R(x_1 + a_1 x_k) + \sum_{i=2}^{k-1} R(x_i + a_i x_k)$ bei allen $\mathfrak{p} \in E$ $\min(k - 1, n + 1 - \operatorname{codh} R_\mathfrak{p})$-basisch ist. Bei allen $\mathfrak{p} \in \mathfrak{C}_n - E$ gilt letzteres ohnehin, unabhängig von der Wahl der $a_1, \ldots, a_{k-1}$.

Anmerkungen. (1) Man kann die Aussage und den Beweis von Satz 1 unmittelbar auf die in [5, Theorem A] betrachtete allgemeinere Situation übertragen: R ist ein kommutativer noetherscher Ring, A eine nicht notwendig kommutative R-Algebra, die als R-Modul endlich erzeugt ist, und M ein endlich erzeugter A-Modul. Man hat lediglich bei den vorkommenden Moduln N überall $\mu(N_\mathfrak{p})$ durch $\mu(A_\mathfrak{p}, N_\mathfrak{p})$ und $\mathrm{I}_s(N)$ durch $\mathrm{I}_s(A, N)$ zu ersetzen (zu den Bezeichnungen vgl. [5]). Wir können natürlich nicht auf die Forderung verzichten, R möge noethersch sein. Außerdem läßt sich Teil (2) von Satz 1 analog zu [5, Theorem A, (iib)] in der Weise verallgemeinern, daß man verlangt, für das Element $a \in A$ sei (a, x_1) basisch in $A \oplus M$ bei allen $\mathfrak{p} \in \mathfrak{C}_n$, und dann ein basisches Element der Form $x_1 + ax'$, $x' \in \sum_{i=2}^{k} Ax_i$ bekommt.

(2) Ähnlich wie in [5] lassen sich eine Reihe von Folgerungen zu Satz 1 angeben, die sämtlich Analoga zu Korollaren von [5, Theorem A] sind. Das folgende Beispiel, es entspricht dem Theorem von Serre, mag zeigen, wie diese Folgerungen in Anlehnung an [5] zu formulieren sind: *P sei ein projektiver R-Modul, der einen Rang* $> \max\{\operatorname{codh} R_\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p}$ *Primideal von $R\}$ besitzt; dann spaltet P einen freien direkten Summanden des Ranges* 1 *ab.* (Zum Beweis vgl. man [5, Corollary 1]; die Voraussetzungen von Satz 1 sind erfüllt, da P einen Rang besitzt.)

2. Die Reduktion des Ranges m-torsionsloser Moduln

In diesem Abschnitt zeigen wir, wie ein m-torsionsloser R-Modul eines Ranges $> m$ durch einen m-torsionslosen R-Modul des Ranges m in geeigneter Weise "ersetzt" werden kann.

Satz 2. *M sei ein m-torsionsloser R-Modul mit einem Rang $r \geqq m$. Es sei* dh $M < \infty$ *oder $R_\mathfrak{p}$ regulärer lokaler Ring für alle $\mathfrak{p} \in \mathfrak{C}_m$, ferner g: $R^n \to M$*

ein Epimorphismus, $e_1, \ldots, e_n$ *eine Basis von* R^n *und* $s := n - r + m + 1$. *Dann existieren Elemente* $x_s, \ldots, x_n \in R^n$, *die folgenden Bedingungen genügen*:

(1) $e_1, \ldots, e_{s-1}, x_s, \ldots, x_n$ *ist eine Basis von* R^n,

(2) $g(x_s), \ldots, g(x_n)$ *sind linear unabhängige Elemente von* M,

(3) $M' := M/\sum_{i=s}^n Rg(x_i)$ *ist m-torsionslos und vom Rang m*,

(4) *der natürliche Epimorphismus* $p: R^n \to F := R^n/\sum_{i=s}^n Rx_i$ *bildet* Kern g *isomorph auf den Kern des von* g *induzierten Epimorphismus* $g': F \to M'$ *ab.*

Beweis. Wir führen einen Induktionsbeweis. Im fall $r = m$ ist nichts zu beweisen, und bei $r > m$ genügt est, die Existenz eines $x \in R^n$ nachzuweisen, das folgenden Anforderungen genügt:

(1′) $e_1, \ldots, e_{n-1}, x$ ist eine Basis vor R^n,

(2′) $g(x)$ ist linear unabhängig,

(3′) $M'' := M/Rg(x)$ ist m-torsionslos und rang $M'' = r - 1$,

(4′) der natürliche Epimorphismus $p': R^n \to R^n/Rx$ bildet Kern g isomorph auf den Kern des von g induzierten Epimorphismus $g'': R^n/Rx \to M''$ ab.

Die Ungleichung $r > m$ impliziert $\mu(M_\mathfrak{p}) > m$ für alle Primideale $\mathfrak{p}$ von R. Nach Voraussetzung über M bzw. R ist dh $M_\mathfrak{p} < \infty$ für alle $\mathfrak{p} \in \mathfrak{C}_m$, sogar dh $M_\mathfrak{p} = 0$, denn bei $\mathfrak{p} \in \mathfrak{C}_m$ hat man wegen der Eigenschaft (b_m) m-torsionsloser R-Moduln (vgl. Einleitung) codh $M_\mathfrak{p}$ = codh $R_\mathfrak{p}$. $M_\mathfrak{p}$ ist also frei für alle $\mathfrak{p} \in \mathfrak{C}_m$. Da M den Rang r besitzt, ist $\mu(M_\mathfrak{p}) = \mu(M_\mathfrak{q}) = r$ für alle $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \mathfrak{C}_m$. Die Elemente $g(e_1), \ldots, g(e_n)$ erzeugen M, und so existieren nach Satz 1, (2) $a_1, \ldots, a_{n-1} \in R$ derart, daß, wenn $x := e_n + \sum_{i=1}^{n-1} a_i e_i$ gesetzt wird, $g(x)$ nicht in $\mathfrak{p}M_\mathfrak{p}$ liegt bei allen $\mathfrak{p} \in \mathfrak{C}_m$.

Es ist klar, daß mit dieser Wahl von x (1′) erfüllt ist. Da $g(x)$ für alle $\mathfrak{p} \in \mathfrak{C}_m$, speziell für alle $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R)$ in eine Basis des freien $R_\mathfrak{p}$-Moduls $M_\mathfrak{p}$ aufgenommen werden kann, ist $M''_\mathfrak{p}$ ein freier $R_\mathfrak{p}$-Modul für diese Primideale $\mathfrak{p}$ und $g(x)$ ein linear unabhängiges Element von M. Mithin gilt (2′).

Ist $\mathfrak{p} \notin \mathfrak{C}_m$, also codh $R_\mathfrak{p} > m$, so ergibt sich aus der exakten Sequenz

$$0 \to R_\mathfrak{p} g(x) \to M_\mathfrak{p} \to M''_\mathfrak{p} \to 0$$

mit codh $R_\mathfrak{p} g(x)$ = codh $R_\mathfrak{p} > m$ und codh $M_\mathfrak{p} \geqq m$ auch codh $M''_\mathfrak{p} \geqq m$, insgesamt codh $M''_\mathfrak{p} \geqq \min(m, \operatorname{codh} R_\mathfrak{p})$ für alle Primideale $\mathfrak{p}$ von R. Da M'' endliche homologische Dimension hat oder R m-Gorensteinring ist, folgt hieraus, daß M'' m-torsionslos ist. Aus (2′) folgt rang $M'' = r - 1$.

Es bleibt (4′) zu beweisen. Elementare Überlegungen zeigen, daß p' den Kern von g auf Kern g'' abbildet. Nun ist aber rang Kern g = rang Kern g''

und deshalb $\mathrm{Kern}(p' \mid \mathrm{Kern}\, g)$ ein torsionsfreier R-Modul des Ranges 0, mithin der Nullmodul.

Anmerkung. Schwächt man die Voraussetzungen von Satz 2 soweit ab, daß Satz 1 gerade noch anwendbar bleibt, erhält man etwa folgende Aussage: *M sei ein R-Modul derart, daß $M_\mathfrak{p}$ frei ist bei $\mathfrak{p} \in \mathfrak{C}_m$ und $\mu(M_\mathfrak{p}) \geqq \mu(M_\mathfrak{q})$ aus* $\mathrm{codh}\, R_\mathfrak{p} > \mathrm{codh}\, R_\mathfrak{q}$ *für $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \mathfrak{C}_m$ folgt; weiterhin sei*

$$r := \min\{\mu(M_\mathfrak{q}) \mid \mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}(R)\} \geqq m,$$

$g, e_1, \ldots, e_n$, s seien wie in Satz 2. *Dann existieren Elemente $x_s, \ldots, x_n \in R^n$ mit den Eigenschaften* (1), (2), *und* (4) *von Satz* 2, *für die* (*an Stelle von* (3)) *gilt*: $(M/\sum_{i=s}^n Rg(x_i))_\mathfrak{p}$ *ist frei bei $\mathfrak{p} \in \mathfrak{C}_m$, und es gibt ein $\mathfrak{q}$ in* $\mathrm{Ass}(R)$ *mit*

$$\left\langle M\Big/\sum_{i=s}^{n} Rg(x_i)\right\rangle_\mathfrak{q} = m.$$

(Der Beweis besteht wie der von Satz 2 in einer Induktion über r, wobei Satz 1 den Induktionsschluß sichert; lediglich bei (4) muß man etwas subtiler argumentieren: Ein R-Homomorphismus $f: N \to N'$, N torsionsfrei, ist genau dann injektiv, wenn für alle $\mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}(R) f \otimes_R R_\mathfrak{q}$ injektiv ist.)

Das folgende Korollar zeigt, daß man unter den leicht abgeschwächten Voraussetzungen von Satz 2 über M bzw, R die projektiven Moduln in einer exakten Sequenz

$$0 \to M \to P_m \to \cdots \to P_1$$

recht speziell wählen kann:

Korollar 1. *M sei ein m-torsionsloser R-Modul, $m \geqq 2$, der einen Rang r besitzt. Es sei* $\mathrm{dh}\, M < \infty$ *oder $R_\mathfrak{p}$ regulärer lokaler Ring für alle $\mathfrak{p} \in \mathfrak{C}_{m-1}$. Dann existiert eine exakte Sequenz*

$$0 \to M \xrightarrow{f} R^{r+m-1} \to R^{2m-3} \to R^{2m-5} \to \cdots \to R^3 \to R^1.$$

M besitzt also insbesondere eine Einbettung $f: M \to R^{r+m-1}$, bei der Kokern $f (m-1)$-torsionslos ist, und ist $(m-1)$-ter Syzygienmodul eines Ideals von R; dieses läßt sich bei $m > 2$ von drei, bei $m = 2$ von $r+1$ Elementen erzeugen.

Beweis. Die projektiven Moduln in der unter Eigenschaft (s_m) m-torsionsloser R-Moduln angegebenen exakten Sequenz lassen sich sicher als freie Moduln wählen, so daß überhaupt eine exakte Sequenz

$$0 \to M \to F \to N \to 0$$

existiert, bei der F frei und N $(m-1)$-torsionslos ist. Mit M besitzt auch N einen Rang und ist von endlicher homologischer Dimension, wenn dies auf

M zutrifft. Durch Anwendung von Satz 2 auf den Epimorphismus $F \to N$ ergibt sich im Falle $\operatorname{rang} F \geqq r + m - 1$ eine exakte Sequenz

$$0 \to M \to F' \to N' \to 0,$$

bei der N' $(m-1)$-torsionslos und vom Rang $m - 1$, F' mithin isomorph zu R^{r+m-1} ist. Im anderen Fall erhält man diese exakte Sequenz durch Anfügen eines freien direkten Summanden des richtigen Ranges an F.

Die soeben für M angestellten Überlegungen ergeben bei Anwendung auf N' eine exakte Sequenz

$$0 \to N' \to R^{2m-3} \to N'' \to 0,$$

bei der N'' $(m-2)$-torsionslos ist usw.

Einen Spezialfall von Satz 2 wollen wir noch hervorheben, da er eine Verallgemeinerung eines Theorems von Bourbaki ist [2, p. 76, Théorème 6]. Bourbaki beweist den Fall $m = 1$ (unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß R nullteilerfrei ist.)

KOROLLAR 2. *Die Lokalisierungen $R_\mathfrak{p}$ für $\mathfrak{p} \in \mathfrak{C}_m$ seien reguläre lokale Ringe, M ein m-torsionsloser R-Modul, der einen Rang $\geqq m$ besitzt. Dann existiert ein freier Untermodul F von M, für den M/F m-torsionslos und vom Rang m ist.*

3. ÜBER DIE FORTSETZBARKEIT GEWISSER PROJEKTIVER AUFLÖSUNGEN ZU AUFLÖSUNGEN VON IDEALEN, DIE VON DREI ELEMENTEN ERZEUGT WERDEN

Wir können nun ohne Mühe das in der Einleitung bereits zitierte Resultat beweisen:

SATZ 3. *Sei M ein m-torsionsloser R-Modul, der einen Rang besitzt, und*

$$0 \to F_n \xrightarrow{f_n} F_{n-1} \to \cdots \to F_{m+1} \xrightarrow{f_{m+1}} F_m \xrightarrow{g} M \to 0$$

eine projektive Auflösung von M, $n > m \geqq 1$, F_m ein freier R-Modul und $r := \operatorname{rang} \operatorname{Bild} f_{m+1}$. Dann existieren Homomorphismen $c: F_m \to R^{r+m}$, f_m: $R^{r+m} \to R^{2m-1}$, f_j: $R^{2j+1} \to R^{2j-1}$, $j = 1,\ldots, m-1$, derart, daß mit $f'_{m+1} := c \circ f_{m-1}$ die Sequenz

$$0 \to F_n \xrightarrow{f_n} F_{n-1} \to \cdots \to F_{m+2} \xrightarrow{f_{m+2}} F_{m+1} \xrightarrow{f'_{m+1}} R^{r+m}$$
$$\xrightarrow{f_m} R^{2m-1} \xrightarrow{f_{m-1}} R^{2m-3} \to \cdots \to R^3 \xrightarrow{f_1} R$$

exakt ist.

Beweis. Ist $u := \operatorname{rang} F_m \leqq r + m$, so wählen wir c als die Einbettung $F_m \to F_m \oplus R^{r+m-u}$. Sicher ist in diesem Fall

$$0 \to F_n \xrightarrow{f_n} F_{n-1} \to \cdots \to F_{m+2} \xrightarrow{f_{m+2}} F_{m+1} \xrightarrow{f'_{m+1}} R^{r+m}$$

exakt und Kokern f'_{m+1} m-torsionslos und vom Rang m.

Bei $u > r + m$ existieren nach Satz 2 Basiselemente $x_s, \ldots, x_u$, $s := r + m + 1$, von F_m, für die $M' := M/(Rg(x_s) + \cdots + Rg(x_u))$ m-torsionslos und vom Rang m ist die überdies der natürliche Epimorphismus $c: F_m \to F_m/(Rx_s + \cdots + Rx_u) \simeq R^{r+m}$ eine exakte Sequenz $0 \to \operatorname{Bild} f_{m+1} \simeq \operatorname{Kokern} f_{m+2} \to R^{r+m} \to M' \to 0$ induziert. Damit hat auch in diesem Fall f'_{m+1} die gewünschten Eigenschaften. Nun liefert das Korollar 1 zu Satz 2 die Homomorphismen f_i, $i = 1, \ldots, m$.

Anmerkungen. (1) Falls die Lokalisierungen $R_{\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{p} \in \mathfrak{C}_m$, reguläre lokale Ringe sind, gilt Satz 3 auch für nicht endliche Auflösungen (vgl. Satz 2 und Korollar 1).

(2) Es würde genügen, Satz 3 für den Fall zu beweisen, in dem die Moduln $F_{n-1}, \ldots, F_m$ frei sind und F_n projektiv von wohldefinierten Rang ist, denn M hat eine solche Auflösung. Wenn umgekehrt eine Auflösung dieser Art gegeben ist, besitzt M automatisch einen Rang.

(3) Sind sämtliche F_i freie Moduln, so ist M genau dann m-torsionslos, wenn das Ideal $\mathrm{I}(f_j)$ für $j = m + 1, \ldots, n$ einen Grad $\geqq j$ hat (zu dieser Bezeichnung vgl. man [3]; $\mathrm{I}(f_j)$ ist das (rang Kokern f_j)-te Fittingideal von Kokern f_j). Dies folgt unmittelbar aus der m-torsionslosen R-Moduln endlicher homologischer Dimension kennzeichnenden Eigenschaft (b_m) (vgl. Einleitung).

(4) Bei Satz 2 (und seinen Korollaren) ist m stets die untere Grenze für den Rang der konstruierten m-torsionslosen R-Moduln. Wir vermuten, daß der Grund hierfür nicht in der verwendeten Beweismethode zu suchen ist, sondern daß vielmehr keine nicht projektiven m-torsionslosen R-Moduln endlicher homologischer Dimension und eines Ranges $< m$ existieren. Dies gilt jedenfalls bei $m \leqq 2$ oder $\operatorname{dh} M \leqq 1$. Beim Beweis genügt es, lokale Ringe R zu betrachten. Der Fall $m = 1$ ist trivial. Ein 1-torsionsloser, erst recht ein 2-torsionsloser R-Modul des Ranges 1 ist isomorph zu einem Ideal $\mathfrak{a}$ von R, das unter den gegebenen Voraussetzungen eine endliche freie Auflösung und einen Grad $\geqq 1$ hat. Dann aber ist $\mathfrak{a}$ isomorph zu einem Ideal $\mathfrak{a}'$ mit $\operatorname{grad} \mathfrak{a}' \geqq 2$ ([8, Corollary 5.6] oder [3, Corollary 5.2]). $\mathfrak{a}'$ ist nicht 2-torsionslos, es sei denn $\mathfrak{a}' = R$. Bei $\operatorname{dh} M \leqq 1$ gilt die Vermutung auf Grund bekannter Abschätzungen über den Grad von Determinantenidealen: der Grad des (rang M)-ten Fittingideals von M beträgt bei nicht freiem M höchstens rang $M + 1$ (vgl. auch [10, Satz 2]).

(5) In [3, Theorem 8.1] wird der Spezialfall $n = 3$, $m = 2$, $\operatorname{rang} F_2 = \operatorname{rang} F_1 + 2$ von Satz 3 hergeleitet. Der dort gegebene Beweis benutzt die in [3] entwickelte Strukturtheorie freier Auflösungen.

Das folgende Korollar besagt, daß jede natürliche Zahl, die überhaupt homologische Dimension eines m-torsionslosen R-Moduls sein kann, bereits homologische Dimension eines von $2m + 1$ Elementen erzeugten m-torsionslosen R-Moduls des Ranges m ist. Für $m = 1$ ist dies mit völlig anderen Methoden von Burch [4] und Kohn [7] bewiesen worden.

Korollar. *Es seien $s, m \geqq 1$ natürliche Zahlen derart, daß ein R-Modul N mit* $\operatorname{dh} N = s + m$ *existiert. Dann gibt es einen m-torsionslosen R-Modul M mit* $\operatorname{dh} M = s$, *der den Rang m besitzt und von höchstens* $2m + 1$ *Elementen erzeugt wird.*

Beweis. Sei $n := s + m$; wegen $\operatorname{dh} N = n$ existiert eine R-Primfolge $x_1, \dots, x_n$. Bei $s = 1$ wählt man $M = R^n/R(x_1, \dots, x_n)$. Im Falle $s > 1$ betrachtet man das folgende Teilstück des zu $(x_1, \dots, x_n)$ gehörenden Kosulkomplexes:

$$0 \to R \xrightarrow{f_n} R^n \xrightarrow{f_{n-1}} {}^2\textstyle\bigwedge R^n \to \cdots \to {}^{s-2}\textstyle\bigwedge R^n \xrightarrow{f_{m+2}} {}^{s-1}\textstyle\bigwedge R^n.$$

Kokern f_{m+2} ist $(m + 1)$-torsionslos und besitzt einen Rang; sei $r := \operatorname{rang} \operatorname{Bild} f_{m+2}$. Nach Satz 3 existieren Homomorphismen f'_{m+2}, f_{m+1}, für die

$$0 \to R \xrightarrow{f_n} R^n \to \cdots \to {}^{s-3}\textstyle\bigwedge R^n \xrightarrow{f_{m+3}} {}^{s-2}\textstyle\bigwedge R^n$$
$$\xrightarrow{f'_{m+2}} R^{r+m+1} \xrightarrow{f_{m+1}} R^{2m+1}$$

exakt und Kokern f_{m+1} m-torsionslos ist. Die Behauptungen über Rang und Erzeugendenzahl von M sind klar. Bei $s = 2$ ist $f'_{m+2} = f_n$ (es ist ja dann rang Kokern $f_n = m + 1$), bei $s > 2$ wird f_n durch die Konstruktion von f'_{m+2} von vornherein nicht berührt. Da f_n nicht aufspaltet, ist $\operatorname{dh} M = s$.

Wenn die in Anmerkung 4 zu Satz 3 ausgesprochene Vermutung richtig ist, hat ein m-torsionsloser R-Modul endlicher homologischer Dimension, der von weniger als $2m + 1$ Elementen erzeugt wird, bereits homologische Dimension $\leqq 1$. (Es genügt, wieder nur lokale Ringe R zu betrachten; dann hat M bei $\operatorname{dh} M < \infty$ einen Rang.)

Zusatz bei der Korrektur. D. Eisenbud teilte uns mit, die in Anmerkung 4 zu Satz 3 ausgesprochene Vermutung sei zuerst von P. Hackman in einer (nach unserem Wissen) bisher unveröffentlichen Arbeit "Exterior Powers and Homology" ausgesprochen worden (vgl. auch [3, p. 131]). Der Referent bat um einen Hinweis auf die Arbeit "Tout ideal premier d'un anneau noethérien est associé à un ideal engendré par trois éléments" von T. Gulliksen (*C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A* **271** (1970), 1207–1208). Ihr bereits im Titel genanntes Hauptergebnis folgt unmittelbar aus dem Korollar zu Satz 3.

Literatur

1. M. Auslander und M. Bridger, Stable module theory, *Mem. Amer. Math. Soc.* **94** (1969).
2. N. Bourbaki, "Algèbre commutative," Chap. VII. Diviseurs, Hermann, Paris, 1965.
3. D. A. Buchsbaum und D. Eisenbud, Some structure theorems for finite free resolutions, *Advances in Math.* **12** (1974), 84–139.
4. L. Burch, A note on the homology of ideals generated by three elements in local rings, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **64** (1968), 949–952.
5. D. Eisenbud und E. G. Evans, Jr., Generating modules efficiently, Theorems from algebraic K-theory, *J. Algebra* **27** (1973), 278–305.
6. F. Ischebeck, Eine Dualität zwischen den Funktoren Ext und Tor, *J. Algebra* **11** (1969), 510–531.
7. P. Kohn, Ideals generated by three elements, *Proc. Amer. Math. Soc.* **35** (1972), 53–58.
8. R. E. MacRae, On an application of the Fitting invariants, *J. Algebra* **2** (1965), 153–169.
9. G. Scheja und U. Storch, Differentielle Eigenschaften der Lokalisierungen analytischer Algebren, *Math. Ann.* **197** (1972), 137–170.
10. U. Vetter, Zu einem Satz von G. Trautmann über den Rang gewisser kohärenter analytischer Moduln, *Arch. Math.* **XXIV** (1973), 158–161.