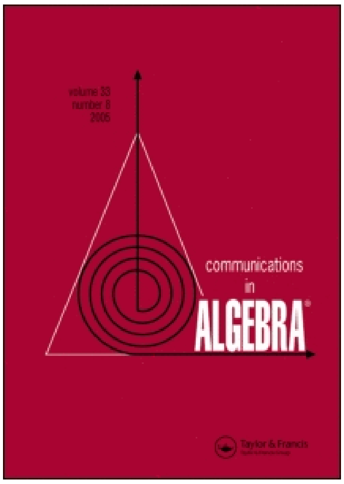

Communications in Algebra
Publication details, including instructions for authors and subscription information:
http://www.informaworld.com/smpp/title~content=t713597239

Zur erzeugung von moduln

Winfried Bruns [a]
[a] Institut für-Mathematik, Technische Universität, Clausthal-Zellerfeld, Erzstrae 1

Online Publication Date: 01 January 1976

To cite this Article Bruns, Winfried(1976)'Zur erzeugung von moduln',Communications in Algebra,4:4,341 — 373
To link to this Article: DOI: 10.1080/00927877608822111
URL: http://dx.doi.org/10.1080/00927877608822111

COMMUNICATIONS IN ALGEBRA, 4(4), 341-373 (1976)

ZUR ERZEUGUNG VON MODULN

Winfried Bruns

Institut für Mathematik
Technische Universität
D-3392 Clausthal-Zellerfeld
Erzstraße 1

0. Einleitung

D. Eisenbud und E. G. Evans, Jr. haben in ihrer Arbeit [5] ein Theorem über die Existenz basischer Elemente in endlich erzeugten Moduln M über noetherschen Ringen R bewiesen und zahlreiche Anwendungen dieser Aussage angegeben. (Ein Element $x \in M$ heißt basisch in M bei einem Primideal $\mathfrak{p}$, wenn es in ein minimales Erzeugendensystem von $M_{\mathfrak{p}}$ aufgenommen werden kann.) Ziel dieser Arbeit ist es, das Theorem von Eisenbud und Evans zu einer Aussage über die Existenz von Elementen in M zu verallgemeinern, die simultan basisch in Restklassenmoduln $M/M_1, \ldots, M/M_s$ sind (Satz 1), und Anwendungen dieser Verallgemeinerung anzugeben.

Die wichtigste Anwendung ist eine Aussage über Erzeugendensysteme von Moduln (Satz 2). Grob gesprochen besagt sie, daß man unter geeigneten Voraussetzungen ein Erzeugendensystem $x_1, \ldots, x_m$ eines Untermoduls M' von M so in ein Erzeugendensystem $x'_1, \ldots, x'_m$ von M' transformieren kann, daß alle k-elementigen Teilmengen von $x'_1, \ldots, x'_m$ Untermoduln erzeugen, die k'-basisch sind bei allen Primidealen, deren Höhe einen gewissen, von M', k und k' abhängigen Wert nicht überschreitet. (Ein Untermodul N heißt k'-basisch in M bei einem Primideal $\mathfrak{p}$, wenn die Minimalerzeugendenzahl von $(M/N)_{\mathfrak{p}}$ um wenigstens k' kleiner ist als die Minimalerzeugendenzahl von $M_{\mathfrak{p}}$.)

Eine genaue Betrachtung des Beweises von Satz 1 zeigt, daß es wie in [5] genügt zu verlangen, R habe ein noethersches Spektrum. Ebenso kann man die Aussagen für solche Ringe formulieren, deren maximales Spektrum noethersch ist. Eine wesentliche Modifikation ergibt sich, wenn man im noetherschen Fall die Höhe von $\mathfrak{p}$ durch die homologische Kodimension (Tiefe) von $R_{\mathfrak{p}}$ ersetzt. Dabei greifen wir auf eine in [1] entwickelte Methode zurück.

Im letzten Abschnitt wenden wir zunächst den Satz über basische Elemente auf Moduln an, die einen Rang besitzen

(Satz 3). Die Aussage über Erzeugendensysteme ermöglicht es, Ergebnisse von Eisenreich ([6]) und Buchsbaum, Eisenbud und Evans ([3]) über Determinantenideale zu verallgemeinern (Satz 4). Zugleich wird damit eine Frage von Buchsbaum und Eisenbud positiv beantwortet. (Einen Spezialfall von Satz 4, der zur Beantwortung dieser Frage bereits ausreicht, hat unabhängig und mit anderen Methoden D. Lazard ([7]) hergeleitet.)

Der von uns bewiesene Satz über basische Elemente ist mit einem Zusatz versehen, der besagt, daß die Koeffizienten der Linearkombinationen bei der Konstruktion von x in geeigneten Teilringen, wie etwa unendlichen Körpern, gewählt werden können. Damit lassen sich natürlich viele Aussagen in [1] und [3] durch einen entsprechenden Zusatz verschärfen. Wie der abschließende Satz 5 zeigt, erschließen sich dem Theorem über basische Elemente hierdurch jedoch auch neue Anwendungen. Er besagt in geometrischer Formulierung: K sei ein algebraisch abgeschlossener Körper, $(X, \mathcal{O})$ ein K-analytischer Raum, $x \in X$. $f_1, \ldots, f_m$ seien Schnitte von $\mathcal{O}$ über einer Umgebung U von x, deren Keime in x das maximale Ideal $\mathfrak{m}_x$ von $\mathcal{O}_x$ erzeugen. Dann kann man $f_1, \ldots, f_m$ durch eine elementare Transformation so in $f'_1, \ldots, f'_m$ überführen, daß gilt: ($f'_{1x}, \ldots, f'_{mx}$ erzeugen $\mathfrak{m}_x$ und) für die K-analytischen Unterräume $(X_i, \mathcal{O}_i) := (N(f_i), (\mathcal{O}|U)/(f_i\mathcal{O}|U))$ ist $\mathrm{Sing}(X_i, \mathcal{O}_i) \subset \mathrm{Sing}(X, \mathcal{O})_x$ (in einer schärferen Version: $\mathrm{Sing}(X_i, \mathcal{O}_i)_x = \mathrm{Sing}(X, \mathcal{O})_x$). Eine ähnliche Aussage für $K = \mathbb{C}$ hat Teissier in [12] bewiesen.

Die vorliegende Arbeit ist eine erweiterte Fassung eines Manuskripts gleichen Namens. Neben einer Verbesserung des Satzes über Erzeugendensysteme - und damit auch des Satzes über Determinantenideale - sind die soeben erwähnten Zusätze über die Koeffizientenwahl neu hinzugekommen. Anstöße zur Überarbeitung waren eine auf Anwendungen wie den letztgenannten Satz abzielende Frage von G. Scheja und die bereits erwähnte Aussage von D. Lazard über Determinantenideale, die einen solchen Zusatz enthält.

Wir erläutern nun einige der verwendeten Begriffe und Bezeichnungen. Abgesehen von wenigen Anmerkungen ist R stets ein noetherscher Ring und M ein endlich erzeugter R-Modul. Die Minimalerzeugendenzahl von $M_{\mathfrak{p}}$ - $\mathfrak{p}$ Primideal von R - bezeichnen wir mit $\mu(M_{\mathfrak{p}})$. Ein Untermodul M' von M heißt k-basisch in M bei dem Primideal $\mathfrak{p}$, wenn $\mu(M/M')_{\mathfrak{p}} \leq \mu(M_{\mathfrak{p}}) - k$ ist, ein Element $x \in M$ basisch in M bei $\mathfrak{p}$, wenn Rx 1-basisch in M bei $\mathfrak{p}$ ist. Sind M_1, M_2 Untermoduln von M, so nennen wir M_1 k-basisch modulo M_2 bei $\mathfrak{p}$, wenn $(M_1+M_2)/M_2$ k-basisch in M/M_2 bei $\mathfrak{p}$ ist. Die Höhe eines Ideals $\mathfrak{a}$ von R wird mit ht $\mathfrak{a}$, die homologische Kodimension einer Lokalisierung $R_\mathfrak{p}$ mit codh $R_\mathfrak{p}$ notiert. Der Bequemlichkeit halber führen wir die folgenden Bezeichnungen ein:

$$\mathfrak{H}_n := \{ \mathfrak{p} : \mathfrak{p} \text{ Primideal von } R \text{ mit } \operatorname{ht} \mathfrak{p} \leqq n \} ,$$

$$\mathfrak{C}_n := \{ \mathfrak{p} : \mathfrak{p} \text{ Primideal von } R \text{ mit } \operatorname{codh} R_\mathfrak{p} \leqq n \} .$$

Das Maximum der Längen von Primidealketten $\mathfrak{p}_m \supset \ldots \supset \mathfrak{p}_1 \supset \mathfrak{p}$ (echte Inklusion) mit $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m \in \mathfrak{H}_n$ wird durch $\dim_n(\mathfrak{p})$ angegeben. Die (Krull-)Dimension von R bezeichnen wir mit dim R. Einige Begriffe und Bezeichnungen erläutern wir unmittelbar vor ihrer Verwendung.

1. Zur Wahl basischer Elemente modulo mehrerer Untermoduln

In diesem Abschnitt beweisen wir eine Verallgemeinerung von Theorem A aus [5] (und Satz 1 aus [1]). Die von D. Eisenbud und E. G. Evans, Jr. entwickelten Methoden erweisen sich dabei als so weittragend, daß neben rein technischen Änderungen nur das Lemma 5 aus [5] unseren Zwecken anzupassen ist. Beim Beweis der Verschärfung (c) müssen wir allerdings etwas weiter von dem ursprünglichen Beweisgang abweichen.

Satz 1: M sei ein R-Modul, $M_1, \dots, M_s$ und M' seien Untermoduln von M, $w_1, \dots, w_s$ nichtnegative ganze Zahlen, $w := \max w_i$. Jeder der Restklassenringe $R/\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p} \in \mathfrak{H}_w$, habe mindestens $s+1$ Elemente.

(a) Sei M' für $k = 1, \dots, s$ bei allen $\mathfrak{p} \in \mathfrak{H}_{w_k}$ $(\dim_{w_k}(\mathfrak{p})+1)$-basisch modulo M_k. Dann enthält M' ein Element x, das bei allen $\mathfrak{p} \in \mathfrak{H}_{w_k}$ modulo M_k basisch ist, $k = 1, \dots, s$.

(b) Sei $x_1, \dots, x_m$ ein Erzeugendensystem von M' und M' für $k = 1, \dots, s$ bei allen $\mathfrak{p} \in \mathfrak{H}_{w_k}$ $(\min(m, \dim_{w_k}(\mathfrak{p})+1)$-basisch modulo M_k. Dann existiert ein $x' \in \sum_{i=2}^{m} Rx_i$, für das $x_1 + x'$ bei allen $\mathfrak{p} \in \mathfrak{H}_{w_k}$ basisch modulo M_k ist, $k = 1, \dots, s$.

(c) Enthält R einen unendlichen Teilring S mit $S \cap \mathfrak{p} = \{0\}$ für alle $\mathfrak{p} \in \mathfrak{H}_w$, so kann man $x' \in \sum_{i=2}^{m} Sx_i$ wählen.

(d) Die vorangegangenen Aussagen bleiben richtig, wenn man überall "$\mathfrak{H}$" durch "$\mathfrak{C}$" und $\dim_{w_k}(\mathfrak{p})$ durch w_k-codh $R_\mathfrak{p}$ ersetzt und verlangt, für $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \mathfrak{C}_{w_k}$ sei $\mu(M/M_k)_\mathfrak{p} \geq \mu(M/M_k)_\mathfrak{q}$ bei codh $R_\mathfrak{p} >$ codh $R_\mathfrak{q}$.

Beweis: Wo im folgenden lediglich Teile des Beweises von Theorem A aus [5] (bzw. Satz 1 aus [1] für (d)) mehrfach anzuwenden sind, begnügen wir uns mit einem entsprechenden Hinweis.

Teil (a) folgt offenbar aus Teil (b), den wir nun durch Induktion über m beweisen. Für $m=1$ ist die Behauptung sicherlich richtig. Bei $m>1$ genügt es, die Existenz von $a_1, \dots, a_{m-1} \in R$ nachzuweisen, für die der Untermodul $\sum_{i=1}^{m-1} R(x_i + a_i x_m)$ die Voraussetzungen von (b) mit $m-1$ an Stelle von m erfüllt. Unter den Voraussetzungen von (c) müssen wir die Elemente a_i in S wählen.

Analog zum Beweis von Theorem A aus [5] zeigt man zunächst für $k = 1, \dots, s$ die Endlichkeit der Mengen E_k derjenigen Primideale $\mathfrak{p} \in \mathfrak{S}_{w_k}$, bei denen M' nicht $\min(m, \dim_{w_k}(\mathfrak{p}) + 2)$-basisch modulo M_k ist. Für die Paare $(\mathfrak{p}, M_k)$, bei denen $\mathfrak{p} \notin E_k$ ist, können wir $a_1, \dots, a_{m-1}$ beliebig wählen. Dies gilt auch für Paare $(\mathfrak{p}, M_k)$ mit $m = \min(m, \dim_{w_k}(\mathfrak{p}) + 1)$, so daß wir diese Primideale $\mathfrak{p}$ aus der Menge E_k entfernen dürfen. Die übriggebliebenen Primideale sollen die Menge E_k' bilden.

Bei der durch (d) gegebenen Version des Satzes zieht man zum Nachweis der Endlichkeit der Mengen E_k den entsprechenden Teil des Beweises von Satz 1 aus [1] heran.

Es seien $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_u$ die Elemente von $E_1' \cup \dots \cup E_s'$. Wir ordnen jedem der Primideale $\mathfrak{p}_i$ die Menge $\mathfrak{M}_i$ der Untermoduln M_k mit $\mathfrak{p}_i \in E_k$ zu. Wir wissen: Für $i = 1,\dots,u$ und alle Untermoduln $N \in \mathfrak{M}_i$ ist M nicht m-basisch modulo N bei $\mathfrak{p}_i$.

(I) Unter den Voraussetzungen von (c) sei T eine Teilmenge von S mit $0 \in T$ und $\operatorname{card} T \geqq \sum_{i=1}^{u} \operatorname{card} \mathfrak{M}_i + 1$.
Weiterhin setzen wir $b := 1$, $y_j := x_j$ für $j = 1,\dots,m$, sowie $E := \{\mathfrak{p}_1,\dots,\mathfrak{p}_u\}$.

(II) Im allgemeinen Fall ist analog zu Lemma 3 aus [5] an dieser Stelle eine Induktion über u einzufügen. Im Fall $u=0$ ist nichts zu beweisen. Sei $u>0$ und o. B. d. A. $\mathfrak{p}_u$ ein minimales Element der Menge $\{\mathfrak{p}_1,\dots,\mathfrak{p}_u\}$. Wir können nun voraussetzen, daß bereits Elemente $a_j' \in R$ gefunden sind, für die gilt: $\sum_{j=1}^{m-1} R(x_j + a_j' x_m)$ ist für alle $M_k \in \mathfrak{M}_i$ $\min(m-1, \dim_{W_k}(\mathfrak{p}_i)+1)$-basisch modulo M_k bei $\mathfrak{p}_i$, $i = 1,\dots,u-1$.

Die Wahl von $\mathfrak{p}_u$ gewährleistet, daß $\bigcup_{i=1}^{u-1} \mathfrak{p}_i \not\subset \mathfrak{p}_u$ ist.
Wir wählen $b \in (\bigcup_{i=1}^{u-1} \mathfrak{p}_i) - \mathfrak{p}_u$. Für beliebige $c_1,\dots,c_{m-1} \in R$ ist dann nach dem Lemma von Nakayama ebenfalls

$$M'' := \sum_{j=1}^{m-1} R(x_j + (a_j' + bc_j)x_m)$$

$\min(m-1, \dim_{W_k}(\mathfrak{p}_i)+1)$-basisch bei $\mathfrak{p}_i$ modulo M_k für alle

$M_k \in \mathfrak{M}_i$, $i = 1,\dots,u-1$. Es sind also $c_1,\dots,c_{m-1}$ so zu bestimmen, daß M'' auch bei $\mathfrak{p}_u$ für alle $M_k \in \mathfrak{M}_u$ $\min(m-1\ ,\ \dim_{w_k}(\mathfrak{p}_u)+1)$-basisch modulo M_k ist. Wir wählen nun ein System von Repräsentanten T' der von 0 verschiedenen Elemente von $R/\mathfrak{p}_u$ und setzen $T := T' \cup \{0\}$. Es sei $E := \{\mathfrak{p}_u\}$ und $y_j := x_j + a_j' x_m$ für $j = 1,\dots,m-1$, sowie $y_m := x_m$.

Der Bequemlichkeit halber führen wir noch einige Bezeichnungen ein. Für ein Primideal $\mathfrak{p}$ ist $K(\mathfrak{p})$ der Körper $R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$, und für einen Untermodul N von M ist $N(\mathfrak{p})$ der $K(\mathfrak{p})$-Untervektorraum $(N_\mathfrak{p} + \mathfrak{p}M_\mathfrak{p})/\mathfrak{p}M_\mathfrak{p}$ von $M_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}M_\mathfrak{p}$. Mit $\beta(N, N', \mathfrak{p})$ notieren wir die Zahl $\max\{n : N$ ist n-basisch modulo N' bei $\mathfrak{p}\}$. $\beta(N, N', \mathfrak{p})$ stimmt mit der Dimension des $K(\mathfrak{p})$-Vektorraums $(N+N')(\mathfrak{p})/N'(\mathfrak{p})$ überein.

In beiden Fällen (I) und (II) befinden wir uns nun in der folgenden Situation: $M' = \sum_{j=1}^{m} Ry_j$ ist ein Untermodul von M , E eine endliche Menge von Primidealen, wobei jedem Primideal $\mathfrak{p} \in E$ eine endliche Menge $\mathfrak{M}(\mathfrak{p})$ von Untermoduln zugeordnet ist. Für alle $\mathfrak{p} \in E$, $N \in \mathfrak{M}(\mathfrak{p})$ gilt $\beta(M', N, \mathfrak{p}) < m$. Weiterhin ist T eine Teilmenge von R , die von jedem der Epimorphismen $R \to R/\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p} \in E$ injektiv abgebildet wird;

es gilt $\operatorname{card} T \geqq \sum_{\mathfrak{p}\in E} \operatorname{card}\mathfrak{M}(\mathfrak{p})+1$ und $0 \in T$. b ist eine Einheit in jedem der Körper $K(\mathfrak{p})$. Unter diesen Voraussetzungen gilt das

<u>Lemma</u>: Es gibt Elemente $c_1,\ldots,c_{m-1} \in T$ derart, daß für den Untermodul M'' gilt:

$$\beta(M'', N, \mathfrak{p}) = \beta(M', N, \mathfrak{p})$$

für alle Primideale $\mathfrak{p} \in E$ und alle $N \in \mathfrak{M}(\mathfrak{p})$. Dabei können $c_1,\ldots,c_{v-1} = 0$ gewählt werden, wenn für alle $j<v$, alle $\mathfrak{p} \in E$ und $N \in \mathfrak{M}(\mathfrak{p})$

$$y_j \notin \sum_{t=1}^{j-1} K(\mathfrak{p})y_t + N(\mathfrak{p})$$

ist.

Der Beweis von Satz 1 wird abgeschlossen, wenn man jetzt $a_j := bc_j = c_j$ im Fall (I) und $a_j := a_j'+bc_j$ im Fall (II) wählt.

Beweis des Lemmas: Wir führen den Beweis durch Induktion über $\sum_{\mathfrak{p}\in E} \operatorname{card}\mathfrak{M}(\mathfrak{p})$. Der Induktionsanfang ist trivial.

Wir setzen

$$v := \min \{ i : \text{es gibt ein } \mathfrak{p} \in E \text{ und ein } N \in \mathfrak{M}(\mathfrak{p}) \text{ mit } y_i \in \sum_{t=1}^{i-1} K(\mathfrak{p})y_t + N(\mathfrak{p}) \}\ .$$

Falls $v = m$ ist, können wir $c_1, \dots, c_{m-1} = 0$ wählen, denn man hat dann

$$\beta\left(\sum_{t=1}^{m-1} Ry_t, N, \mathfrak{p}\right) = m-1 \geqq \beta(M', N, \mathfrak{p})$$

für alle $\mathfrak{p} \in E$, $N \in \mathfrak{M}(\mathfrak{p})$.

Im Fall $v < m$ sei G die Menge aller Paare $(\mathfrak{p}, N)$ mit $N \in \mathfrak{M}(\mathfrak{p})$ und

$$(*) \qquad y_v \notin \sum_{t=1}^{v-1} K(\mathfrak{p}) y_t + N(\mathfrak{p}) \quad .$$

Ist $G = \emptyset$, so wählen wir $c_1, \dots, c_{v-1}, c_{v+1}, \dots, c_{m-1} := 0$ und $c_v \in T - \{0\}$. Im anderen Fall gibt es wegen der Beziehung $(*)$ zu jedem Paar $(\mathfrak{p}, N) \in G$ höchstens ein $a \in T$ mit

$$y_v + bay_m \in \sum_{t=1}^{v-1} K(\mathfrak{p}) y_t + N(\mathfrak{p}) \quad .$$

Wir können also ein $c \in T - \{0\}$ finden mit

$$y_v + bcy_m \notin \sum_{t=1}^{v-1} K(\mathfrak{p}) y_t + N(\mathfrak{p})$$

für alle $(\mathfrak{p}, N) \in G$. Wählen wir nun $c_1, \dots, c_{v-1} := 0$, $c_v := c$, so wissen wir: für alle Paare $(\mathfrak{p}, N) \notin G$ ist

$$y_m \in \sum_{t=1}^{v} K(\mathfrak{p}) (y_t + bc_t y_m) + N(\mathfrak{p})$$

und mithin

$$\beta\left(\sum_{t=1}^{m-1} R(y_t + bc_t y_m), N, \mathfrak{p}\right) = \beta(M', N, \mathfrak{p})$$

unabhängig von der Wahl der Elemente $c_{v+1},\dots,c_{m-1}$.

Nun sei $\mathfrak{M}'(\mathfrak{p}) := \{N : (N,\mathfrak{p}) \in G\}$ für alle $\mathfrak{p} \in E$, sowie $y_t' := y_t + bc_t y_m$ für $t \leqq v$ und $y_t' := y_t$ für $t > v$. Durch die Wahl von $c_1,\dots,c_v$ ist sichergestellt, daß

$$v < \min\{\, i : \text{es gibt ein } \mathfrak{p} \in E \text{ und ein } N \in \mathfrak{M}'(\mathfrak{p}) \text{ mit } y_i' \in \sum_{t=1}^{i-1} K(\mathfrak{p})y_t' + N(\mathfrak{p}) \,\}$$

ist. Die Induktionsvoraussetzung läßt uns jetzt Elemente $c_{v+1},\dots,c_{m-1} \in T$ finden derart, daß für den Untermodul

$$M'' := \sum_{t=1}^{v} Ry_t' + \sum_{t=v+1}^{m-1} R(y_t' + c_t y_m) = \sum_{t=1}^{m-1} R(y_t + c_t y_m)$$

gilt:

$$\beta(M'', N, \mathfrak{p}) = \beta(M', N, \mathfrak{p})$$

auch für alle Paare $(\mathfrak{p}, N) \in G$.–

Wir wollen diesen Abschnitt mit einigen Anmerkungen zu Satz 1 abschließen. Die ersten zwei behandeln Erweiterungen des Satzes, die wir in den Satz nicht mit aufgenommen haben, weil sie die Formulierung und den Beweis nur technisch komplizierter gestalten.

1) Offensichtlich kann man Satz 1 mit dem folgenden Zusatz versehen: Sei F eine endliche Menge von Primidealen, jedem

dieser Primideale $\mathfrak{q}$ sei eine endliche Menge $\mathfrak{N}(\mathfrak{q})$ von Untermoduln von M zugeordnet derart, daß M 1-basisch modulo N bei $\mathfrak{q}$ ist für alle $\mathfrak{q} \in F$ und alle $N \in \mathfrak{N}(\mathfrak{q})$. Sei $s' := \operatorname{card}(\{M_i : i=1,\ldots,s\} \cup \bigcup_{\mathfrak{q}\in F} \mathfrak{N}(\mathfrak{q}))$. Wenn die Restklassenringe $R/\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p} \in \mathfrak{H}_w \cup F$ mindestens $s'+1$ Elemente enthalten ($S \cap \mathfrak{p} = \{0\}$ für $\mathfrak{p} \in \mathfrak{H}_w \cup F$ ist), können x bzw. x' zusätzlich so gewählt werden, daß x bzw. $x_1 + x'$ basisch modulo N bei $\mathfrak{q}$ ist für alle $\mathfrak{q} \in F$, $N \in \mathfrak{N}(\mathfrak{q})$. Wir werden diesen Zusatz beim Beweis von Satz 2 benötigen.

2) Es ist offensichtlich weiter möglich, mehrere der in den Voraussetzungen des Satzes 1 beschriebenen "Situationen" simultan zu behandeln. Wir wollen dies am Fall zweier "Situationen" erläutern: Sei $\tilde{M}$ ein weiterer R-Modul, $\tilde{M}_1, \ldots, \tilde{M}_{\tilde{s}}$ und $\tilde{M}' = \sum_{i=1}^{m} R\tilde{x}_i$ Untermoduln von $\tilde{M}$, $\tilde{w}_1, \ldots, \tilde{w}_{\tilde{s}}$ nichtnegative ganze Zahlen derart, daß $\tilde{M}'$ $\min(m, \dim_{\tilde{w}_i}(\mathfrak{p})+1)$-basisch ist modulo $\tilde{M}_i$ bei allen $\mathfrak{p} \in \mathfrak{H}_{\tilde{w}_i}$, $i=1,\ldots,s$; $\tilde{w} := \max \tilde{w}_i$. Für alle $\mathfrak{p} \in \mathfrak{H}_{\max(w,\tilde{w})}$ sei $\operatorname{card} R/\mathfrak{p} \geqq s+\tilde{s}+1$ ($S \cap \mathfrak{p} = \{0\}$). Dann existieren $a_2, \ldots, a_m \in R$ ($a_2, \ldots, a_m \in S$) derart, daß $x_1 + \sum_{j=2}^{m} a_j x_j$ basisch ist modulo M_i bei allen $\mathfrak{p} \in \mathfrak{H}_{w_i}$, $i=1,\ldots,s$ und $\tilde{x}_1 + \sum_{j=2}^{m} a_j \tilde{x}_j$ basisch ist modulo $\tilde{M}_i$ bei allen $\mathfrak{p} \in \mathfrak{H}_{\tilde{w}_i}$,

$i=1,\ldots,\tilde{s}$. Es gilt natürlich auch eine entsprechende "$\mathfrak{C}$"-Version. Außerdem kann man den in Anmerkung 1 angegebenen Zusatz erweitern. Wir werden die in dieser Anmerkung ausgesprochene Verallgemeinerung bei Anmerkung 2 zu Satz 5 benötigen.

3) Die Voraussetzung, R sei noethersch, benötigt man im Beweis von Teil (b) des Satzes 1 , um die Endlichkeit der Mengen E_k zu sichern. Dabei wird lediglich ausgenutzt, daß Ideale in noetherschen Ringen nur endlich viele minimale Primideale besitzen. Es genügt folglich zu fordern, R habe ein noethersches Spektrum. Analog zu Theorem A aus [5] kann man auch eine Version des Satzes 1 für Ringe angeben, deren maximales Spektrum noethersch ist. Solche Ringe werden in [5] j-noethersch genannt. In diesen Fällen folgt allerdings Teil (a) nicht unmittelbar aus Teil (b) , da M' nicht endlich erzeugt zu sein braucht. Den Ausweg bietet hier wie in [5] das Lemma 2 aus [5] , durch dessen mehrfache Anwendung man sich endlich erzeugte Untermoduln $M_1',\ldots,M_s'$ von M' verschafft, deren Summe ebenfalls die Voraussetzungen von Teil (a) erfüllt.

4) Für mögliche Anwendungen in der algebraischen K-Theorie könnte es nützlich sein, eine zu Satz 1 analoge Aussage in der Situation " R (j-)noetherscher kommutativer Ring, A nicht notwendig kommutative R-Algebra, die als R-Modul endlich erzeugt ist, M endlich erzeugter A-Modul " zu haben (vgl. [5]). Dazu hätte man das Lemma entsprechend zu verallgemeinern. An die Stelle der Körper $K(\mathfrak{p})$ treten dann die halbeinfachen artinschen Ringe $A_{\mathfrak{p}}/$Jacobsonradikal von $A_{\mathfrak{p}}$.

5) Berücksichtigt man im Fall (II) bei der Wahl des Elementes c im Beweis des Lemmas $(y_v + bcy_m \notin \sum_{t=1}^{v-1} K(\mathfrak{p})y_t + N(\mathfrak{p})$ für $(\mathfrak{p}, N) \in G)$ Inklusionsbeziehungen zwischen den Moduln N, so kann man in gewissen Fällen (vgl. Anmerkung 6 zu Satz 2) mit schärferen Abschätzungen für die Anzahl der Elemente $R/\mathfrak{p}$ auskommen. Es genügt ja, c so zu wählen, daß die erwähnte Eigenschaft für die maximalen unter den Moduln N, $(\mathfrak{p}, N) \in G$, zutrifft.

2. Zur Konstruktion von Erzeugendensystemen

In diesem Abschnitt verwenden wir Satz 1, um Erzeugendensysteme von Untermoduln zu konstruieren, deren Teilmengen "so basisch wie möglich" sind:

<u>Satz 2</u>: M sei ein R-Modul, M' ein Untermodul von M, der bei allen Primidealen $\mathfrak{p} \in \mathfrak{H}_n$ $(n+v)$-basisch in M ist.

(a) Sei $x_1, \ldots, x_m$ ein Erzeugendensystem von M'. Die Restklassenringe $R/\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p} \in \mathfrak{H}_n$, mögen mindestens $2^{m-1}+1$ Elemente enthalten. Dann existiert ein Erzeugendensystem $x'_1, \ldots, x'_m$ von M' mit folgender Eigenschaft: Für jede k-elementige Teilmenge J von $\{1, \ldots, m\}$ ist der Untermodul $\sum_{j\in J} Rx'_j$ k'-basisch in M bei allen Primidealen $\mathfrak{p} \in \mathfrak{H}_{\min(n, n+v+k-2k')}$, $k = 1, \ldots, m$, $k' = 1, \ldots, \min(n+v, k)$

(b) Genauer gilt: Das Erzeugendensystem $x'_1, \ldots, x'_m$ läßt sich schrittweise konstruieren in der Form

$$x'_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x'_j + x_i + \sum_{j=i+1}^{m} a_{ij} x_j$$

mit geeigneten Elementen $a_{ij} \in R$.

(c) Enthält R einen unendlichen Teilring S mit $S \cap \mathfrak{p} = \{0\}$ für alle $\mathfrak{p} \in \mathfrak{H}_n$, so kann man die Elemente $a_{ij} \in S$ wählen.

(d) Die vorangegangenen Aussagen bleiben richtig, wenn man überall "$\mathfrak{H}$" durch "$\mathfrak{C}$" ersetzt und verlangt, für $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \mathfrak{C}_n$ mit $\operatorname{codh} R_\mathfrak{p} > \operatorname{codh} R_\mathfrak{q}$ sei $\mu(M_\mathfrak{p}) \geqq \mu(M_\mathfrak{q})$.

Beweis: Eine Transformation der unter (b) genannten Art überführt Erzeugendensysteme sicherlich wieder in Erzeugendensysteme, so daß wir uns im folgenden um diesen Teil der Behauptung nicht mehr zu kümmern brauchen.

Sei $r < m$ und seien $x_1', \dots, x_r'$ derart gefunden, daß

(1) für jede k-elementige Teilmenge J von $\{1, \dots, r\}$ der Untermodul $M_J := \sum_{j \in J} Rx_j'$ k'-basisch in M ist bei allen $\mathfrak{p} \in \mathfrak{S}_{\min(n,\, n+v+k-2k')}$, $k = 1, \dots, r$, $k' = 1, \dots, \min(n+v, k)$.

Wir setzen $\mathfrak{J}_k := \{J : J \subset \{1, \dots, r\},\ \mathrm{card}\ J = k\}$, $k = 0, \dots, r$.

Im ersten Teil des Beweises zeigen wir, daß x_{r+1}' so konstruiert werden kann, daß $x_1', \dots, x_{r+1}'$ die behauptete Eigenschaft für $k' = k$ hat. Für $k = 0, \dots, \min(n+v-1, r)$ ist M_J, $J \in \mathfrak{J}_k$, höchstens k-basisch in M bei irgendeinem Primideal, da M_J von k Elementen erzeugt wird. (Nach den üblichen Konventionen ist $M_\emptyset$ der Nullmodul.) Da M' $(n+v)$-basisch in M ist bei den Primidealen $\mathfrak{p} \in \mathfrak{S}_n$, muß M mindestens $(n+v-k)$-basisch modulo M_J bei ihnen sein. Wir setzen $w_J := \min(n, n+v-k-1)$. Für die Primideale $\mathfrak{p} \in \mathfrak{S}_{w_J}$ gilt dann:

(2) M ist bei $\mathfrak{p}$ $(\dim_{w_J}(\mathfrak{p})+1)$-basisch modulo M_J,

da für alle $\mathfrak{p} \in \mathfrak{S}_{w_J}$ $\dim_{w_J}(\mathfrak{p})+1 \leqq w_J+1 \leqq n+v-k$ ist.

Nach Satz 1, (b) existieren Elemente $a_{r+1,1},\dots,$ $a_{r+1,r}, a_{r+1,r+2},\dots,a_{r+1,m} \in R$ derart, daß

(3) $\quad x'_{r+1} = \sum_{i=1}^{r} a_{r+1,i}x'_i + x_{r+1} + \sum_{i=r+2}^{m} a_{r+1,i}x_i$

bei allen $\mathfrak{p} \in \mathfrak{S}_{w_J}$, $J \in \mathfrak{J}_k$, $k=0,\min,\dots,\min(n+v-1,r)$, basisch modulo M_J ist.

Satz 1, (c) zeigt, daß wir unter den Voraussetzungen von (c) die Elemente $a_{r+1,i}$ in S finden können.

Wir wollen nun gleich nachweisen, daß x'_{r+1} die behauptete Eigenschaft für $k'=k$ hat. $k'=k$ ist nur möglich bei $k=1,\dots,\min(n+v,r+1)$. Sei also J eine k-elementige Teilmenge von $\{1,\dots,r+1\}$. Ist $J' \subset \{1,\dots,r\}$, so ist $N := \sum_{j\in J'} Rx'_j$ bereits nach (1) k-basisch in M bei allen Primidealen $\mathfrak{p} \in \mathfrak{S}_{\min(n,\,n+v+k-2k')}$. Im anderen Fall ist $J' = J \cup \{r+1\}$, $J \in \mathfrak{J}_{k-1}$. Dann gilt

$$\mu(M/N)_{\mathfrak{p}} = \mu(M/M_J)_{\mathfrak{p}} - 1 = \mu(M_{\mathfrak{p}}) - (k-1) - 1 = \mu(M_{\mathfrak{p}}) - k$$

für alle $\mathfrak{p} \in \mathfrak{S}_{\min(n,\,n+v+k-2k')} = \mathfrak{S}_{w_J}$. Die erste Gleichung folgt aus (3) , die zweite aus (1) .

Es ist nun noch zu beweisen, daß x'_{r+1} zusätzlich so gewählt werden kann, daß $x'_1,\dots,x'_{r+1}$ die behauptete Eigenschaft auch im Fall $k' < k$ besitzt. Sei $k \in \{1,\dots,r\}$,

$k' \in \{1,\ldots,\min(n+v,k)\}$, $J \in \mathfrak{J}_k$. Wir wissen nach (1) :

M_J ist k'-basisch in M bei allen Primidealen

$\mathfrak{p} \in \mathfrak{H}_{\min(n,\, n+v+k-2k')}$. Lemma 4 aus [5] impliziert deshalb:

(4) Es gibt nur endlich viele Primideale $\mathfrak{q} \in \mathfrak{H}_{\min(n,\, n+v+k-2k'+1)}$, bei denen M_J nicht k'-basisch in M ist.

Sollte M_J nicht k'-basisch in M bei dem Primideal $\mathfrak{q} \in \mathfrak{H}_{\min(n,\, n+v+k-2k'+1)}$ sein, so nehmen wir $\mathfrak{q}$ in die Menge F und M_J in die Menge $\mathfrak{N}(\mathfrak{q})$ auf. (4) zeigt: card $F < \infty$. Für Primideale $\mathfrak{q} \in F$ und Moduln $N \in \mathfrak{N}(\mathfrak{q})$ ist N nicht $(n+v)$-basisch in M bei $\mathfrak{q}$. Folglich muß M' wenigstens 1-basisch modulo N bei $\mathfrak{q}$ sein. Nach Anmerkung 1 zu Satz 1 können wir x'_{r+1} zusätzlich zu (3) noch so wählen, daß

(5) x'_{r+1} für jedes $\mathfrak{q} \in F$ und jedes $N \in \mathfrak{N}(\mathfrak{q})$ basisch modulo N bei $\mathfrak{q}$ ist .

Sei nun $k \in \{1,\ldots,r+1\}$, $k' \in \{1,\ldots,\min(n+v,k-1)\}$, J' eine k-elementige Teilmenge von $\{1,\ldots,r+1\}$. Wegen (1) können wir gleich $J' = J \cup \{r+1\}$, $J \in \mathfrak{J}_{k-1}$ annehmen. Sei $\mathfrak{q} \in \mathfrak{H}_{\min(n,\, n+v+k-2k')}$. Ist $\mathfrak{q} \notin F$ oder $M_J \notin \mathfrak{N}(\mathfrak{q})$, so ist bereits M_J k'-basisch in M bei $\mathfrak{q}$ nach Definition von F und $\mathfrak{N}(\mathfrak{q})$. Im anderen Fall gilt gemäß (5) :

$$\mu(M/\sum_{j\in J'} Rx'_j)_{\mathfrak{q}} = \mu(M/M_J)_{\mathfrak{q}} - 1 \quad .$$

Aus (1) folgt: M_J ist (k'-1)-basisch in M bei allen Primidealen $\mathfrak{q}' \in \mathfrak{S}_{\min(n,\, n+v+k-1-2k'+2)} \supset \mathfrak{S}_{\min(n,\, n+v+k-2k')}$.
Folglich:

$$\mu(M/M_J)_{\mathfrak{q}} = \mu(M_{\mathfrak{q}}) - (k'-1) \ .$$

Damit ist - bis auf Teil (d) - alles bewiesen.

Beim Beweis der durch (d) gegebenen Version des Satzes nimmt man im vorangegangenen Beweis die bei (d) genannten Ersetzungen vor und beachtet, daß die zusätzliche Voraussetzung über M sich auf die Restklassenmoduln M/M_J und Primideale $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \mathfrak{S}_{w_J}$ überträgt. Wir können deshalb bei der Wahl von x'_{r+1} gemäß (3) auf Satz 1 , (d) zurückgreifen. Daß (4) auch für diese Version gilt, sieht man folgendermaßen ein (vgl. auch Beweis zu Satz 1 in [1]): Es genügt, (5) für solche Primideale $\mathfrak{q}$ mit codh $R_{\mathfrak{q}} = \min(n, n+v+k-2k'+1)$ zu beweisen, bei denen $\mu(M_{\mathfrak{q}})$ den festen Wert t hat. Sei $\mathfrak{q}'$ ein Primideal mit codh $R_{\mathfrak{q}'} < \min(n, n+v+k-2k'+1)$; dann ist

$$\mu(M/M_J)_{\mathfrak{q}'} \leqq \mu(M_{\mathfrak{q}'}) - k' \leqq t - k'$$

gemäß (1) und der zusätzlichen Voraussetzung $\mu(M_{\mathfrak{q}'}) \leqq \mu(M_{\mathfrak{q}})$. Die Menge der Primideale $\mathfrak{r}$, bei denen $\mu(M/M_J)_{\mathfrak{r}} > t-k'$ ist, bildet die Varietät eines Ideals $\mathfrak{a}$ von R . Wie wir gerade gesehen haben, ist grad $\mathfrak{a} \geqq \min(n, n+v+k-2k'+1)$. Die Behauptung folgt nun aus [1], Hilfssatz. –

Anmerkungen: 1) Teilaussagen von Satz 2 gelten bereits unter abgeschwächten Voraussetzungen über M' : M' sei für alle $\mathfrak{p} \in \mathfrak{H}_n$ $(n+v-\operatorname{ht}\mathfrak{p})$-basisch in M bei $\mathfrak{p}$. Dann kann man $x'_1, \ldots, x'_m$ auf die angegebene Weise derart konstruieren, daß $x'_1, \ldots, x'_m$ die behauptete Eigenschaft für $k=1, \ldots, n+v$, $k' = k$ besitzt. Es gilt auch eine entsprechende "$\mathfrak{C}$"-Version. Man beweist diese Aussage analog zum ersten Teil des Beweises von Satz 2.

2) Es genügt, bei den Teilen (a), (b) und (c) von Satz 2 vorauszusetzen, daß R ein noethersches Spektrum besitzt. Man kann ebenso eine Version von Satz 2 für j-noethersche Ringe angeben (vgl. Anmerkung 1 zu Satz 1).

3) Die Voraussetzung über die Restklassenringe $R/\mathfrak{p}$ ist überflüssig, sobald für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m}$ von R $\mu(M/M')_{\mathfrak{m}} = \mu(M_{\mathfrak{m}})-m$ ist. Offensichtlich braucht man dann bei der Konstruktion von $x'_1, \ldots, x'_m$ auf die maximalen Ideale keine Rücksicht mehr zu nehmen. Für die nichtmaximalen Primideale $\mathfrak{p}$ hat $R/\mathfrak{p}$ natürlich immer unendlich viele Elemente.

4) Im allgemeinen ist eine Voraussetzung über die Anzahl der Elemente der Ringe $R/\mathfrak{p}$ jedoch unvermeidlich. Dies zeigt das folgende Gegenbeispiel: K sei der Körper aus zwei Elementen, $R := K \oplus K$, $M := K^2 \times K^4$, wobei wir die Multiplikation $R \times M \to M$ durch $(a,b)(x,y) := (ax,by)$ definieren. Es ist $\mu(M_{\mathfrak{p}_i}) \geqq 2$ für jedes der beiden Primideale $\mathfrak{p}_1 := K \oplus 0$ und $\mathfrak{p}_2 := 0 \oplus K$ von R . Ein Erzeugendensystem $x_1, \dots, x_m$ von $M' := M$ besteht jedoch aus mindestens vier Elementen. Bei $R_{\mathfrak{p}_2} \cong K$, $M_{\mathfrak{p}_2} \cong K^2$ ist es natürlich unmöglich, daß für jede zweielementige Teilmenge $\{i_1, i_2\}$ von $\{1,\dots,m\}$ x_{i_1} und x_{i_2} einen zweidimensionalen Untervektorraum von K^2 erzeugen.

5) Wir haben nicht vorausgesetzt (und auch im Beweis nicht benutzt), daß $v \geqq 0$ ist.

6) Bei Beachtung von Anmerkung 5 zu Satz 1 können wir eine bessere Abschätzung als $2^{m-1}+1$ für die Zahl der Elemente der Ringe $R/\mathfrak{p}$ angeben. Im schlechtesten Fall wäre das Lemma anzuwenden auf $\mathfrak{M}(\mathfrak{p}) = \{M_J : J \in \bigcup_{k=0}^{m-1} \mathfrak{J}_k\}$. Die Indizes J der maximalen Elemente einer Teilmenge von $\mathfrak{M}(\mathfrak{p})$ bilden eine ungeordnete Teilmenge U von $\mathfrak{P}(\{1,\dots,m-1\})$. Nach einem Ergebnis von Sperner ([10])ist

$$\text{card } U \leqq \binom{m-1}{[\frac{m-1}{2}]}$$

wobei $[\frac{m-1}{2}]$ die größte ganze Zahl $\leqq \frac{m-1}{2}$ ist. Es genügt folglich vorauszusetzen:

$$\text{card } R/\mathfrak{p} \geqq \binom{m-1}{[\frac{m-1}{2}]} + 2$$

für alle $\mathfrak{p} \in \mathfrak{H}_n (\mathfrak{p} \in \mathfrak{C}_n)$.

3. Anwendungen

In diesem Abschnitt geben wir Anwendungen der Sätze 1 und 2 an. Die erste betrifft Moduln, die einen Rang besitzen, und hat Vorläufer in [8], Hilfssatz 1 und [11], Hilfssatz 1. Wir sagen, ein R-Modul habe den Rang v, wenn $M \otimes_R Q(R)$ ein freier $Q(R)$-Modul des Ranges v ist (dabei bezeichnet $Q(R)$ den totalen Quotientenring von R, vgl. [9], §6).

Satz 3: M sei ein R-Modul, der den Rang v besitzt, $x_1, \ldots, x_m$ ein Erzeugendensystem von M. Für alle Primideale $\mathfrak{p} \in \mathfrak{C}_0$ habe $R/\mathfrak{p}$ mindestens $\binom{m-1}{v-1} + 1$ Elemente. Dann existiert ein Erzeugendensystem $x_1', \ldots, x_m'$ von M derart, daß für jede v-elementige Teilmenge J von $\{1, \ldots, m\}$ die Elemente x_j', $j \in J$, linear unabhängig sind.

Beweis: Die Voraussetzung über den Rang von M ist äquivalent zu der Aussage: $M_{\mathfrak{p}}$ ist ein freier $R_{\mathfrak{p}}$-Modul des Ranges v für alle $\mathfrak{p} \in \mathfrak{C}_0$ ([9], §6, man beachte, daß die in $\mathfrak{C}_0$ enthaltenen Primideale gerade die zu R assoziierten Primideale sind).

Wir konstruieren die Elemente $x'_1, \ldots, x'_m$ wie bei Satz 2, (b) sukzessiv unter Zuhilfenahme von Satz 1 so, daß

(1) x'_i basisch modulo $\sum_{j=1}^{i-1} Rx'_j$ bei allen $\mathfrak{p} \in \mathfrak{C}_0$ ist, $i = 1, \ldots, v-1$ und

(2) x'_i basisch modulo $\sum_{j \in J} Rx'_j$ bei allen $\mathfrak{p} \in \mathfrak{C}_0$ für alle $(v-1)$-elementigen Teilmengen J von $\{1, \ldots, i-1\}$ ist, $i = v, \ldots, m$.

Es ist leicht einzusehen, daß dann für jede v-elementige Teilmenge J von $\{1, \ldots, m\}$ der Untermodul $\sum_{j \in J} Rx'_j$ v-basisch in M bei allen $\mathfrak{p} \in \mathfrak{C}_0$ ist. Folglich muß $\sum_{j \in J} R_{\mathfrak{p}} x'_j = M_{\mathfrak{p}}$ sein, und die Elemente x'_j, $j \in J$ sind linear unabhängig über $R_{\mathfrak{p}}$. Da dies für alle Primideale $\mathfrak{p} \in \mathfrak{C}_0$ gilt, sind sie auch linear unabhängig über R. —

Man kann Satz 3 auch aus Satz 2 herleiten. Wir sind im Beweis bis auf Satz 1 zurückgegangen, um eine bessere Abschätzung für $\operatorname{card} R/\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p} \in \mathfrak{C}_0$, verwenden zu können.

Die zweite Anwendung betrifft Determinantenideale. Sie beantwortet eine Frage von D. A. Buchsbaum und D. Eisenbud ([3], p. 125, Remark) und verallgemeinert das Lemma 8.2 aus [3] und Satz 115 aus [6]. Zu den Bezeichnungen: Für eine (m, n)-Matrix B mit Koeffizienten in R bezeichnet $I_t(B)$ das von den Determinanten der (t, t)-Teilmatrizen von B erzeugte Ideal. Wir nennen eine quadratische Matrix C elementar, wenn sie Produkt von quadratischen Matrizen C_i ist, wobei die C_i in der Hauptdiagonalen nur 1 und außerhalb der Hauptdiagonalen höchstens ein von 0 verschiedenes Element enthalten.

<u>Satz 4</u>: B sei eine (m, n)-Matrix mit Koeffizienten in R. Das Ideal $I_r(B)$ habe die Höhe (den Grad) t. Die Restklassenringe $R/\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p} \in \mathfrak{H}_{t-1}$ ($\mathfrak{p} \in \mathfrak{C}_{t-1}$), mögen mindestens $2^{n-1}+1$ Elemente enthalten. Dann gibt es eine elementare (n, n)-Matrix C mit Koeffizienten in R derart, daß für jede (m, k)-Teilmatrix D von BC gilt:

$$\mathrm{ht}\, I_{k'}(D) \geqq \min(t, r+k-2k'+1)$$
$$(\ \mathrm{grad}\, I_{k'}(D) \geqq \min(t, r+k-2k'+1)\ )$$

$k = 1, \ldots, n$, $k' = 1, \ldots, \min(r, k)$. Enthält R einen unendlichen Teilring S mit $S \cap \mathfrak{p} = \{0\}$ für alle $\mathfrak{p} \in \mathfrak{H}_{t-1}$ ($\mathfrak{p} \in \mathfrak{C}_{t-1}$), so kann man die Koeffizienten von C in S wählen.

Beweis: M' sei der von den Spalten $x_1, \dots, x_n$ der Matrix B erzeugte Untermodul des freien Moduls R^m. ht $I_r(B) \geqq t$ bedeutet: M' ist r-basisch in R^m bei allen Primidealen $\mathfrak{p} \in \mathfrak{H}_{t-1}$ $(\mathfrak{p} \in \mathfrak{S}_{t-1})$.

Nach Satz 2 läßt sich $x_1, \dots, x_n$ mittels einer elementaren Matrix C , deren Koeffizienten gegebenenfalls in S gewählt werden können, in ein Erzeugendensastem $x_1', \dots, x_n'$ von M' überführen, für das gilt: Für jede k-elementige Teilmenge J von $\{1, \dots, n\}$ ist $\sum_{j \in J} Rx_j'$ k'-basisch in R^m bei allen Primidealen $\mathfrak{S} \in \mathfrak{H}_{\min(t-1,\, r+k-2k')}$ $(\mathfrak{p} \in \mathfrak{S}_{\min(t-1,\, r+k-2k')})$. Wählt man J als Menge der Indizes der in D vorkommenden Spalten, so bedeutet letzteres gerade:

ht $I_k(D) \geqq \min(t, r+k-2k'+1)$ (grad $I_k(D) \geqq \min(t, r+k-2k'+1)$) . –

Anmerkungen: 1) Die Frage von Buchsbaum und Eisenbud betrifft eine speziellere Situation, als sie in Satz 4 gegeben ist: R ist ein lokaler Ring, die Koeffizienten von B sind Elemente des maximalen Ideals von R . Außerdem ist $r = k' = m$. Die Voraussetzung über die Ringe $R/\mathfrak{p}$ ist dann natürlich stets erfüllt. Im Fall $r = k' = m$ gilt auch stets ht $I_k(D) \geqq \min(t, r+k-2k'+1) = \min(t, k-k'+1)$ (grad $I_k(D) \geqq \min(t, k-k'+1)$) nach einem Satz von Eagon und Northcott ([4] , Theorem 3) , sofern

$I_{k'}(D) \neq R$ ist. Wir wollen auch darauf hinweisen, daß es in der Situation der Frage von Buchsbaum und Eisenbud für den Fall "Grad" genügt, die Behauptung für $k = m+t-1$ zu beweisen. Für größeres k ist sie dann trivialerweise auch richtig, für kleineres k folgt sie aus einem Satz von Buchsbaum ([1], Prop. 4). Lazard hat in [7], Théorème 2 unabhängig und mit anderen Methoden einen Spezialfall ($r = k' = m$, $k = m, \ldots, n$) von Satz 4 bewiesen, der natürlich die Frage von Buchsbaum und Eisenbud bereits beantwortet.

2) Wie Buchsbaum, Eisenbud und Evans in [3], Lemma 8.2 gezeigt haben, ist im Fall $r = k' = m = 1$, $k \geqq t$ die Voraussetzung über die Anzahl der Elemente der Ringe $R/\mathfrak{p}$ überflüssig. Lazard hat dieses Ergebnis auch für $k \leqq t$ erhalten ([7], Théorème 1, vgl. auch Prop. 1). Man kann es auch sehr leicht mit den von uns entwickelten Methoden beweisen, denn man braucht die gesuchten Elemente stets nur so zu wählen, daß sie bei endlich vielen Primidealen 1-basisch in R sind. Sobald jedoch $k' \geqq 2$ ist, kommt man ohne eine Voraussetzung über die Anzahl der Elemente der Ringe $R/\mathfrak{p}$ nicht mehr aus. Für ein Gegenbeispiel wählen wir einen noetherschen Ring R, der ein zu R assoziiertes maximales Ideal $\mathfrak{m}$ mit card $R/\mathfrak{m} = 2$ und einen Nichtnullteiler a enthält, der keine Einheit ist. Die

Matrix

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

läßt sich nicht in der gewünschten Weise transformieren.

3) Wir haben bei Satz 4 den Fall $I_r(B) = R$ nicht ausgeschlossen. In diesem Fall hat man $\text{ht } R = \dim R + 1$ bzw. $\text{grad } R = \max \{ \text{grad } \mathfrak{m} : \mathfrak{m} \text{ maximales Ideal von } R \} + 1$ zu setzen. Diese Werte können natürlich auch unendlich sein.

4) Es genügt zu fordern: $\text{card } R/\mathfrak{p} \geqq \binom{n-1}{[\frac{n-1}{2}]} + 2$ für alle $\mathfrak{p} \in \mathfrak{H}_{t-1}$ $(\mathfrak{p} \in \mathfrak{C}_{t-1})$. Man vergleiche dazu Anmerkung 6 zu Satz 2.

Bei der folgenden Anwendung von Satz 1 zeigt sich, wie wichtig es ist, daß man die Koeffizienten bei der Konstruktion basischer Elemente in geeigneten Teilringen von R wählen kann. Für die benutzten Begriffe und Aussagen verweisen wir generell auf [9]. (Wir nennen ein Primideal $\mathfrak{p}$ singulär, wenn $R_{\mathfrak{p}}$ kein regulärer lokaler Ring ist.)

Satz 5: K sei ein unendlicher Körper, R eine lokale analytische K-Algebra, deren Primideale sämtlich separabel sind. Die Elemente $x_1, \ldots, x_m \in R$ mögen das maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von R erzeugen. Dann gibt es eine elementare (m,m)-Matrix C mit

Koeffizienten in K derart, daß für $(y_1, \ldots, y_m) := (x_1, \ldots, x_m)C$ gilt: Ein Primideal $\mathfrak{p}$ in R/Ry_i ist höchstens dann singulär, wenn sein Urbild $\mathfrak{q}$ in R singulär ist.

Beweis: Der Fall einer regulären K-Algebra R ist sehr einfach zu behandeln. Sei etwa $x_j \notin \mathfrak{m}^2$. Dann wählen wir $y_i := x_i$, wenn $x_i \notin \mathfrak{m}^2$, und $y_i := x_i + x_j$, wenn $x_i \in \mathfrak{m}^2$ ist. Es bleibt der Fall einer singulären K-Algebra zu untersuchen. Wir können $\dim R > 0$ annehmen.

Da die Separabilität eines Primideals $\mathfrak{q}$ von R nur vom Restklassenring $R/\mathfrak{q}$ abhängt, sind auch sämtliche Primideale in Restklassenringen von R separabel. Für separable Primideale $\mathfrak{r}$ in analytischen K-Algebren S gilt $\mu(D_K(S)_{\mathfrak{r}}) = \mu(\mathfrak{r} S_{\mathfrak{r}}) + \dim S/\mathfrak{r}$.

Sei $n := \dim R$. Nach der soeben angegebenen Formel für die Minimalerzeugendenzahl der Lokalisierungen von $D_K(R)$ ist $D_K(R)$ bei allen Primidealen $\mathfrak{q} \in \mathfrak{S}_{n-1}$ $(\dim_{n-1}(\mathfrak{q})+1)$-basisch in sich selbst. Die Differentiale $dx_1, \ldots, dx_m$ bilden ein Erzeugendensystem von $D_K(R)$. Nach Satz 1, (c) können wir sukzessiv Elemente $a_{ij} \in K$ finden, so daß für

$$y_i := \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} y_j + x_i + \sum_{j=i+1}^{m} a_{ij} x_j$$

gilt:

$$dy_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}dy_j + dy_i + \sum_{j=i+1}^{m} a_{ij}dx_j$$

ist basisch in $D_K(R)$ bei allen Primidealen $\mathfrak{q} \in \mathfrak{H}_{n-1}$. (Nach Anmerkung 1 zu Satz 1 kann y_i überdies so gewählt werden, daß dy_i auch bei $\mathfrak{m}$ basisch in $D_K(R)$ ist.)

Sei nun $\mathfrak{p}$ ein Primideal in $S := R/Ry_i$, $\mathfrak{q}$ sein Urbild in R. Es ist $D_K(S) \cong (D_K(R)/Rdy_i) \otimes_R S$ und

$$\begin{aligned}\mu(D_K(S)_{\mathfrak{p}}) &= \mu(((D_K(R)/Rdy_i) \otimes_R S)_{\mathfrak{p}} \\ &= \mu(D_K(R)/Rdy_i)_{\mathfrak{q}} \\ &= \mu(D_K(R))_{\mathfrak{q}} - 1 .\end{aligned}$$

Folglich: $\mu(\mathfrak{p} S_{\mathfrak{p}}) = \mu(\mathfrak{q} R_{\mathfrak{q}}) - 1$. Da $\dim S_{\mathfrak{p}} \geqq \dim R_{\mathfrak{q}} - 1$ ist, gilt

$$\mu(\mathfrak{p} S_{\mathfrak{p}}) - \dim S_{\mathfrak{p}} \leqq \mu(\mathfrak{q} R_{\mathfrak{q}}) - \dim R_{\mathfrak{q}} .$$

Insbesondere ist $\mu(\mathfrak{p} S_{\mathfrak{p}}) - \dim S_{\mathfrak{p}} = 0$, $S_{\mathfrak{p}}$ also regulär, wenn $R_{\mathfrak{q}}$ regulär ist.—

Anmerkungen: 1) Wenn K algebraisch abgeschlossen ist, können wir die Aussage von Satz 5 auch geometrisch formulieren. Man vgl. dazu die Einleitung.

2) Die Aussage von Satz 5 läßt sich (im Fall $\dim R > 0$) verschärfen, indem man "höchstens dann" durch "genau dann" ersetzt. Dazu ist es notwendig, die Elemente y_i zusätzlich so zu konstruieren, daß für alle Primideale $\mathfrak{p}$ in $S = R/Ry_i$ und ihre Urbilder $\mathfrak{q}$ $\dim S_{\mathfrak{p}} = \dim R_{\mathfrak{q}} - 1$ ist. Dies gilt, wenn y_i in keinem minimalen Primideal von R enthalten ist. Bei $\dim R > 0$ ist das maximale Ideal $\mathfrak{m}$ 1-basisch in R bei allen minimalen Primidealen, d. h. den Primidealen $\mathfrak{r} \in \mathfrak{S}_0$. Nach Anmerkung 2 zu Satz 1 können wir die a_{ij} zusätzlich so wählen, daß y_i basisch in R bei allen Primidealen $\mathfrak{r} \in \mathfrak{S}_0$ ist. Letzteres gilt genau dann, wenn $y_i \notin \mathfrak{r}$ für alle $\mathfrak{r} \in \mathfrak{S}_0$. Entsprechend kann man in der geometrischen Formulierung nun "$\subset$" durch "$=$" ersetzen.

3) Durch eine einfache Induktion kann man aus Satz 5 als Folgerung ableiten: $x_1, \ldots, x_m$ lassen sich elementar so in $y_1, \ldots, y_m$ transformieren, daß für jeden der Restklassenringe $\widetilde{R}_k := R / \sum_{i=1}^{k} Ry_i$ gilt: Ein Primideal $\mathfrak{p}$ in $\widetilde{R}_k$ ist höchstens dann singulär, wenn sein Urbild $\mathfrak{q}$ in R singulär ist. Für $1 \leq k \leq \dim R$ läßt sich sogar "genau dann" an Stelle von "höchstens dann" erreichen. Dies ist die algebraische Formulierung einer Aussage von Teissier für $K = \mathbb{C}$, die mit geo-

metrischen Methoden bewiesen wurde ([12], 1.1 Lemme, p. 296). Teissier macht allerdings eine weitergehende Aussage über die Wahl der y_i : sie lassen sich in einem gewissen Sinn "generisch" wählen.

LITERATUR

1. W. Bruns: "Jede" endliche freie Auflösung ist freie Auflösung eines von drei Elementen erzeugten Ideals. Erscheint demnächst im J. Algebra

2. D. A. Buchsbaum: A generalized Koszul-complex I. Trans. Amer. Math. Soc. 111 (1964), 183-197

3. D. A. Buchsbaum und D. Eisenbud: Some structure theorems for finite free resolutions. Advances in Math. 12 (1974), 84-139

4. J. A. Eagon und D. G. Northcott: Ideals defined by matrices and a certain complex associated with them. Proc. Royal Soc. Ser. A 269 (1962), 188-204

5. D. Eisenbud und E. G. Evans, Jr.: Generating modules efficiently: Theorems from algebraic K-theory. J. Algebra 27 (1973), 278-305

6. G. Eisenreich: Zur Syzygientheorie und Theorie des inversen Systems perfekter Ideale und Vektormoduln in Polynomringen und Stellenringen. S.-B. d. Sächs. Akad. d. Wiss. z. Leipzig 109 (3), 1970

7. D. Lazard: Suites régulières dans les ideaux déterminantiels. Commun. Algebra 4 (1976), 327-340.

8. H. J. Nastold: Zum Primbasissatz in regulären lokalen Ringen. Arch. Math. XII (1961), 30-33

9. G. Scheja und U. Storch: Differentielle Eigenschaften der Lokalisierungen analytischer Algebren. Math. Ann. 197 (1972), 137-170

10. E. Sperner: Ein Satz über Untermengen einer endlichen Menge. Math. Z. 27 (1928), 544-548

11. U. Storch: Zur Längenberechnung von Moduln. Arch. Math. XXIV (1973), 39-43

12. B. Teissier: Cycles évanescents, sections planes et conditions de Whitney. Astérisque 7/8 (1974), 285-362

Received: July 1975