manuscripta math. 14, 337 - 348 (1975)

ZUR LÄNGENBERECHNUNG DER TORSION ÄUSSERER POTENZEN

Winfried Bruns und Udo Vetter

Let R be a noetherian ring of dimension d and M a finitely generated R-module of homologic dimension less or equal to one. Assume further that M has a rank r, which equals d or (in case d>0) d-1 and that the r-th Fitting-ideal $\mathfrak{F}_r(M)$ of M has grade $\geq$d. Then the torsion-submodule of the d-th exterior power of M and the module $R/\mathfrak{F}_r(M)$ are equivalent.

Einleitung, Bezeichnungen

Für lokale, komplex-analytische, vollständige Durchschnitte R einer Dimension d>0 und mit isolierter Singularität beweist G.-M. Greuel in [3] (Lemma 2.8), daß der Torsionsuntermodul der d-ten äußeren Potenz des analytischen $\mathbb{C}$-Differentialmoduls und der Restklassenring von R nach dem d-ten Fitting-Ideal dieses Moduls die gleiche $\mathbb{C}$-Dimension besitzen. Der Greuelsche Beweis benutzt, daß R "eingebettet" ist. Ziel unserer Überlegungen ist es, einen einbettungsunabhängigen Beweis für das zitierte Resultat anzugeben. Wir zeigen (Satz 4): Ist R ein noetherscher Ring der Dimension d, M ein endlicher R-Modul mit homologischer Dimension ≤ 1 und einem Rang r = d oder - falls d>0 - r = d-1, hat ferner das r-te Fitting-Ideal $\mathfrak{F}_r(M)$ von M einen Grad $\geq$d, dann sind der Torsionsuntermodul der d-ten äußeren Potenz von M und der Modul $R/\mathfrak{F}_r(M)$ äquivalent, haben also insbesondere die gleiche (endliche) Länge. Bei d$\leq$1 ist dies der von U. Storch in [8] bewiesene Satz.

Wesentliches Hilfsmittel bei unseren Untersuchungen sind die von K. Lebelt in [4] und [5] angegebenen Komplexe $\mathcal{C}_p^m(b_1,\ldots,b_m)$ zu Elementen $b_1,\ldots,b_m$ eines freien R-Moduls R^n. Sind $b_1,\ldots,b_m$ linear unabhängig und hat M die spezielle Gestalt $R^n/Rb_1+\ldots+Rb_m$, dann ist bei $r \geqslant d$ und endlicher Länge von $R/\mathfrak{F}_r(M)$ die Wechselsumme über die (endlichen) Längen der Homologiemoduln dieser Komplexe gleich 0, falls $p \geqslant r$ gilt (Satz 3). Andererseits lassen sich bei der betrachteten speziellen Gestalt von M die Moduln, deren Längen in der zu beweisenden Aussage verglichen werden, als Homologiemoduln in einem geeigneten Komplex $\mathcal{C}_p^m(b_1,\ldots,b_m)$ darstellen, woraus sich mit der Bedingung über den Grad von $\mathfrak{F}_r(M)$ das angestrebte Resultat sofort ergibt. Wie bei U. Storch (Korollar 2 in [8]) erhält man eine Anwendung auf Differentialmoduln (Satz 5), die das Ergebnis von G.-M. Greuel impliziert.-

Wir erläutern noch einige der verwendeten Begriffe und Bezeichnungen. R sei ein noetherscher Ring, Q(R) der totale Quotientenring von R und M ein endlicher R-Modul. Ist $M\otimes_R Q(R)$ ein freier Q(R)-Modul, dann heißt sein Rang der Rang von M; wir bezeichnen ihn mit rang M (vgl. [7], § 6). Der Kern tM des natürlichen Homomorphismus $M \longrightarrow M\otimes_R Q(R)$ heißt Torsionsuntermodul von M. Ist tM = 0, dann nennen wir M torsionsfrei. Die homologische Dimension von M über R notieren wir mit dhM, die Länge von M mit l(M) und bei lokalem R mit $\mu(M)$ die wohlbestimmte Anzahl der Elemente eines minimalen Erzeugendensystems von M; da Mißverständnisse kaum möglich sind, können wir dabei auf Indizes, die den Operatorenbereich kennzeichnen, verzichten. Wie in [8] heißen zwei R-Moduln endlicher Länge äquivalent, wenn die Faktoren einer Kompositionsreihe des einen bis auf die Reihenfolge zu denen einer Kompositionsreihe des anderen isomorph sind. $\mathfrak{F}_i(M)$ ist das i-te Fitting-Ideal von M. Man erhält es aus einer Darstellung von M als Restklassenmodul

$R^n/Rb_1+\dots+Rb_m$, $b_j=(b_{j1},\dots,b_{jn})$, $1 \leq j \leq m$, bei $i \leq n$ als das von allen $(n-i)$-reihigen Unterdeterminanten der Matrix (b_{jk}) erzeugte Ideal in R; bei $i > n$ setzt man $\mathfrak{F}_i(M) := R$. Die p-te äußere Potenz von M notieren wir wie üblich mit ${}^p\wedge M$, die i-te Homologiegruppe eines Komplexes C von R-Moduln mit $H_i(C)$.

Den Grad eines Ideals $\mathfrak{a}$ von R bezeichnen wir mit $\operatorname{grad}\mathfrak{a}$, seine Kodimension (Höhe) mit $\operatorname{codim}\mathfrak{a}$. Die Krull-dimension von R wird mit dim R notiert.

1. Vorbereitungen

Es sei R ein noetherscher Ring und M ein R-Modul, der eine Darstellung $R^n/Rb_1+\dots+Rb_m$ mit linear unabhängigen Elementen $b_1,\dots,b_m \in R^n$ besitzt. Dann ist $r :=$ rang $M = n-m$. Zu jeder Darstellung dieses Typs und jedem $p \geq 0$ werden in [4] und [5] Komplexe $\mathcal{C}^m_p(b_1,\dots,b_m)$ von R-Moduln konstruiert. Ein Teil von $\mathcal{C}^m_p(b_1,\dots,b_m)$ ist die Sequenz

$$({}^{p-1}\wedge R^n)^m \xrightarrow{D^m_{p,1}} {}^p\wedge R^n \xrightarrow{D^m_{p,0}} {}^{p+m}\wedge R^n \longrightarrow 0 \ ;$$

dabei steht ${}^p\wedge R^n$ an der 0-ten Stelle von $\mathcal{C}^m_p(b_1,\dots,b_m)$, und es ist $D^m_{p,1}(y_1,\dots,y_m) = \sum_{i=1}^{m} b_i \wedge y_i$, $D^m_{p,0}(x) = b_1\wedge\dots\wedge b_m \wedge x$. I.f. notieren wir die für uns wichtigen Eigenschaften der Homologiemoduln $H_{p,i} := H_i(\mathcal{C}^m_p(b_1,\dots,b_m))$ (s. [4], § 2 und [5], Abschnitt 2):

(1) $H_{p,i} = 0$ für $i \geq p$ und $i < -1$.

(2) $H_{p,0} \cong t\,{}^p\wedge M$.

(3) $H_{r,-1} \cong R/\mathfrak{A}_r(M)$.

(4) $H_{p,-1} = 0$ für $p > r$.

(5) $H_{p,i} = 0$ für $i \geq 0$, falls M ein freier R-Modul ist.

(6) $\operatorname{grad} \mathfrak{A}_r(M) > q \geq 0$ impliziert $H_{p,p-i} = 0$ für $i = 0,\dots,\min\{p,q\}$.

Wir wollen zeigen, daß die $H_{p,i}$ mit wenigen Ausnahmen endliche Länge haben, wenn dies für $R/\mathfrak{A}_r(M)$ gilt. Dazu benötigen wir eine Aussage über die Annullatorideale dieser Moduln.

SATZ 1. Mit Ausnahme der Fälle (p,i), in denen $i = -1$ und $p < r$, wird jedes $H_{p,i}$ von einer Potenz von $\mathfrak{A}_r(M)$ annulliert.

Beweis. Da die $H_{p,i}$ endliche R-Moduln sind, genügt es nachzuweisen, daß $(H_{p,i})_{\mathfrak{p}} = 0$ ist für alle Primideale $\mathfrak{p}$ von R mit $\mathfrak{p} \not\supset \mathfrak{A}_r(M)$.

Für ein solches $\mathfrak{p}$ ist $M_{\mathfrak{p}}$ ein freier $R_{\mathfrak{p}}$-Modul, isomorph zu $R^n_{\mathfrak{p}}/R_{\mathfrak{p}}(b_1\otimes 1)+\dots+R_{\mathfrak{p}}(b_m\otimes 1)$. Nach [5], Satz 1 gilt

$$e^m_p(b_1,\dots,b_m)\otimes_R R_{\mathfrak{p}} = e^m_p(b_1\otimes 1,\dots,b_m\otimes 1),$$

woraus sich

$$H_i(e^m_p(b_1\otimes 1,\dots,b_m\otimes 1)) = (H_{p,i})_{\mathfrak{p}}$$

ergibt. Nach (1), (3), (4) und (5) ist $H_i(e^m_p(b_1\otimes 1,\dots,b_m\otimes 1)) = 0$, es sei denn $i = -1$ und $p < r$.-

Nach Satz 1 ist $H_{p,i}$ mit Ausnahme der dort angegebenen Fälle für ein genügend großes j auf natürliche Weise ein $R/\mathfrak{N}_r(M)^j$-Modul. Hieraus folgt sofort

<u>SATZ 2. Ist</u> $l(R/\mathfrak{N}_r(M))$ <u>endlich, dann ist auch</u> $l(H_{p,i})$ <u>endlich, es sei denn</u> $i = -1$ <u>und</u> $p < r$.

2. Ergebnisse

Besitzt der Modul M über dem noetherschen Ring R die spezielle Darstellung R^n/Rb mit einem linear unabhängigen Element $b \in R^n$, dann ist der Komplex $\mathcal{C}^1_{n-1}(b)$ nichts anderes als der gewöhnliche Koszul-Komplex

$$.. \longrightarrow 0 \longrightarrow R \xrightarrow{b\wedge} R^n \xrightarrow{b\wedge} {}^2\!\wedge R^n \longrightarrow \ldots \longrightarrow {}^{n-1}\!\wedge R^n \xrightarrow{b\wedge} {}^n\!\wedge R^n \longrightarrow 0 \;..$$

(vgl. [5], (2,11)). Ist $\mathfrak{a}$ das von den Komponenten von b erzeugte Ideal in R ($\mathfrak{a} = \mathfrak{N}_{n-1}(M)$), so gilt bei $l(R/\mathfrak{a}) < \infty$ bekanntlich (s.z.B. [6], p. 370, Thm. 5)

$$\sum_{i=-1}^{n-2} (-1)^i l[H_i(\mathcal{C}^1_{n-1}(b))] = -e(b|R),$$

wobei $e(b|R)$ die Multiplizität der Komponenten von b bzgl. R ist. Gilt $n > \dim R$, dann hat man insbesondere

$$\sum_{i=-1}^{n-2} (-1)^i l[H_i(\mathcal{C}^1_{n-1}(b))] = 0. \tag{7}$$

Schließlich ergibt sich wegen $H_i(\mathcal{C}^1_{n-1}(b)) = t^{(n-1)-i}\!\wedge M$, $i = -1,0,\ldots,n-1$, (unter den Voraussetzungen $l(R/\mathfrak{a}) < \infty$, $n > \dim R$):

$$\sum_{i=0}^{n-2} (-1)^i l(t^{(n-1)-i}\!\wedge M) = l(R/\mathfrak{a}). \tag{8}$$

Der folgende Satz ist eine Verallgemeinerung von (7) auf R-Moduln M der Gestalt $R^n/Rb_1+\ldots+Rb_m$ mit linear unabhängigen Elementen $b_1,\ldots,b_m \in R^n$. Daß für solche Moduln eine zu (8) analoge Formel i.a. nicht gilt, zeigt das Beispiel (Anmerkung 2) am Ende dieses Abschnitts.

SATZ 3. *Es sei R ein noetherscher Ring der Dimension d. Die Elemente $b_1,\ldots,b_m \in R^n$ seien linear unabhängig und der R-Modul $M := R^n/Rb_1+\ldots+Rb_m$ besitze einen Rang $r \geq d$. Ist $l(R/\mathfrak{N}_r(M))$ endlich, dann gilt (mit den Bezeichnungen des 1. Abschnitts) für alle $q \geq r$:*

$$\sum_{i=-1}^{q-1} (-1)^i l(H_{q,i}) = 0, \tag{9}$$

im Falle q = r also

$$\sum_{i=1}^{r-1} (-1)^i l(H_{r,i}) + l(t^r \wedge M) = l(R/\mathfrak{N}_r(M)) \tag{10}$$

und bei $q > r$

$$\sum_{i=1}^{q-1} (-1)^i l(H_{q,i}) + l(t^q \wedge M) = 0. \tag{11}$$

Beweis. (10) und (11) folgen sofort aus (9), wenn man die Aussagen (2), (3) und (4) des 1. Abschnitts heranzieht. Da für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ von R $H_i(e^m_q(b_1,\ldots,b_m)) \otimes_R R_{\mathfrak{p}} = H_i(e^m_q(b_1 \otimes 1,\ldots,b_m \otimes 1))$ ist und für R-Moduln N stets $l(N) = \sum_{\mathfrak{m}} l(N_{\mathfrak{m}})$ gilt, wobei $\mathfrak{m}$ die Menge der maximalen Ideale von R durchläuft, dürfen wir beim Beweis von (9) annehmen, daß R ein lokaler Ring mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ ist.

Wir beweisen (9) durch Induktion über $\mu(M)$. Bei $\mu(M) = r$ ist M ein freier R-Modul. Folglich verschwinden sämtliche $H_{q,i}$, und (9) ist in diesem Falle trivialerweise richtig. Es sei jetzt $\mu(M) > r$, $\{e_1,\ldots,e_n\}$ eine Basis von R^n und $f : R^n \longrightarrow M$ der natürliche Epimorphismus. Nach eventuellem Wechsel der Indizes dürfen wir annehmen, daß $\{f(e_s),\ldots,f(e_n)\}$, $s \geq 1$, ein minimales Erzeugendensystem von M ist. Wegen rang $M \geq d$ ist $\mu(M_{\mathfrak{p}}) \geq d$ für alle Primideale $\mathfrak{p}$ von R. Da M nicht frei ist, gilt $d > 0$. Wir betrachten die Gesamtheit $\mathcal{P}$ der nicht maximalen Primideale von R. Nach [2], Theorem A in Verbindung mit der anschließenden Bemerkung existieren $a_s, \dots, a_{n-1} \in R$ derart, daß

$$x: = f(e_n) + \sum_{j=s}^{n-1} a_j f(e_j) \notin \mathfrak{p}M_{\mathfrak{p}}$$

ist für alle $\mathfrak{p} \in \mathcal{P}$. Es gilt sogar $x \notin \mathfrak{p}M_{\mathfrak{p}}$ für alle Primideale $\mathfrak{p}$ von R, da nach Wahl von $f(e_s), \dots, f(e_n)$ sicherlich auch $x \notin \mathfrak{m}M$ ist. Nach einer Basistransformation können wir $x = f(e_n)$ annehmen.

Wir setzen $N: = M/Rx$. Ist $(b_{j1}, \dots, b_{jn})$ die Koordinatendarstellung von b_j, $j = 1, \dots, m$, in der zuletzt gewählten Basis von R^n und setzen wir $b_j': = (b_{j1}, \dots, b_{jn-1})$ für $j = 1, \dots, m$, dann gilt wegen $x = f(e_n)$ offenbar $N \cong R^{n-1}/Rb_1' + \dots + Rb_m'$. Nach Konstruktion von x ist $N_{\mathfrak{p}}$ frei für alle Primideale $\mathfrak{p}$ von R mit $\mathfrak{p} \not\supseteq \mathfrak{I}_r(M)$, da dies für $M_{\mathfrak{p}}$ gilt. Es folgt rang $N = r-1$, $l(R/\mathfrak{I}_{r-1}(N)) < \infty$ und die lineare Unabhängigkeit von $b_1', \dots, b_m'$. Nach [4], p.35, Bemerkung 2 hat man eine exakte Sequenz von Komplexen

$$0 \longrightarrow e^m_{q-1}(b_1', \dots, b_m') \longrightarrow e^m_q(b_1, \dots, b_m) \longrightarrow e^m_q(b_1', \dots, b_m') \longrightarrow 0$$

und, aus dieser resultierend, eine lange exakte Homologiesequenz

$$\dots \longrightarrow H_i' \longrightarrow H_i \longrightarrow H_i'' \longrightarrow H_{i-1}' \longrightarrow \dots,$$

wobei wir $H_i': = H_i(e^m_{q-1}(b_1', \dots, b_m'))$, $H_i: = H_{q,i}$ und $H_i'': = H_i(e^m_q(b_1', \dots, b_m'))$ setzen. Wir erhalten unter Berücksichtigung von (1) und Satz 2 aus Abschnitt 1:

$$(12) \quad \sum_{i=-1}^{q-1} (-1)^i l(H_i) = \sum_{i=-1}^{q-1} (-1)^i (l(H_i') + l(H_i'')).$$

Es sei B die von den Koordinaten der b_j' gebildete $(m,n-1)$-Matrix, $t: = (n-1)-\mu(N)$ und D eine t-reihige Unterdeterminante von B mit $D \notin \mathfrak{m}$. Da M und damit auch N nicht frei ist, gibt es eine Zeile in B, etwa $(b_{k1},\ldots,b_{kn-1})$, deren Elemente in D nicht vorkommen. Wir definieren für $j = 1,\ldots,m$

$$b_j'': = \begin{cases} (b_{j1},\ldots,b_{jn-1},0) & \text{bei } j \neq k \\ (b_{k1},\ldots,b_{kn-1},1) & \text{bei } j=k \end{cases}$$

und setzen

$$M': = R^n/Rb_1''+\ldots+Rb_m''.$$

Es ist rang $M' = n-m = r$, $l(R/\mathfrak{A}_r(M')) \leq l(R/\mathfrak{A}_{r-1}(N)) < \infty$ und $\mu(M') = n-(t+1) = \mu(N) < \mu(M)$. Ferner ergibt sich wieder eine lange exakte Homologiesequenz

$$\ldots \longrightarrow H_i' \longrightarrow H_i(\mathcal{C}_q^m(b_1'',\ldots,b_m'')) \longrightarrow H_i'' \longrightarrow H_{i-1}' \longrightarrow \ldots \quad .$$

Nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$0 = \sum_{i=-1}^{q-1} (-1)^i l[H_i(\mathcal{C}_q^m(b_1'',\ldots,b_m''))]$$

$$= \sum_{i=-1}^{q-1} (-1)^i (l(H_i') + l(H_i'')).$$

Hieraus erhält man mit (12) die Behauptung.

Aus Satz 3 folgt jetzt unser Hauptergebnis:

<u>SATZ 4.</u> <u>Es sei</u> R <u>ein noetherscher Ring der Dimension</u> d, M <u>ein endlicher</u> R-<u>Modul mit</u> $dhM \leq 1$ <u>und einem Rang</u> r, <u>für den</u> $\max\{0,d-1\} \leq r \leq d$ <u>gelte</u>. <u>Ist</u> $\operatorname{grad}\mathfrak{A}_r(M) \geq d$, <u>dann sind</u> $t^d\wedge M$ <u>und</u> $R/\mathfrak{A}_r(M)$ <u>äquivalente</u> R-<u>Moduln</u>.

<u>Beweis.</u> Zwei R-Moduln N und N' sind genau dann äquivalent, wenn für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m}$ von R gilt: $l(N_{\mathfrak{m}}) =$

$= l(N'_{\mathfrak{m}})$. Da M einen Rang besitzt, hat man $(t\overset{d}{\wedge}M)_{\mathfrak{p}} =$ $= t(\overset{d}{\wedge}M)_{\mathfrak{p}} = t\overset{d}{\wedge}M_{\mathfrak{p}}$ für alle Primideale $\mathfrak{p}$ von R. Ferner ist $\mathfrak{J}_r(M_{\mathfrak{p}}) = \mathfrak{J}_r(M)R_{\mathfrak{p}}$ und $\operatorname{grad}(\mathfrak{a}R_{\mathfrak{p}}) \geq \operatorname{grad}\mathfrak{a}$ für alle Ideale $\mathfrak{a}$ von R. Wir dürfen i.f. also R als lokal voraussetzen.

Es sei zunächst $r = d$. Da R lokal ist, besitzt M nach Voraussetzung eine Darstellung $R^n/Rb_1+\ldots+Rb_m$ mit linear unabhängigen Elementen $b_1,\ldots,b_m \in R^n$. Nach (6) aus Abschnitt 1 gilt bei $\operatorname{grad}\mathfrak{J}_r(M) \geq r$: $H_{r,i} = 0$ für $i = 1,\ldots,r-1$. Aus Satz 3,(10) folgt damit die Behauptung.

Bei $r = d-1$ gilt $\operatorname{rang}(M\oplus R) = d$ und $t\overset{d}{\wedge}M = t\overset{d}{\wedge}(M\oplus R)$, da $t\overset{i}{\wedge}M = 0$ ist für $i = 1,\ldots,d-1$ (vgl. (2) und (6) in Abschnitt 1). Wegen $\mathfrak{J}_r(M) = \mathfrak{J}_d(M\oplus R)$ ist nach dem bisher Gezeigten auch in diesem Falle die Behauptung richtig.

ANMERKUNGEN.

1. Die Bedingung $\operatorname{grad}\mathfrak{J}_r(M) \geq d$ in Satz 4 kann ein nicht projektiver R-Modul M mit einem Rang r bei $\operatorname{dhM} \leq 1$ nur dann erfüllen, wenn $r \geq d-1$ gilt. Es genügt wieder, dies für lokales R zu zeigen. Von einer Darstellung $R^n/Rb_1+\ldots+Rb_m$ für M mit $r = n-m$ ausgehend, erschließt man mit [1], Thm. 3: $\operatorname{grad}\mathfrak{J}_r(M) \leq \operatorname{codim}\mathfrak{J}_r(M) \leq r+1$.

2. Die Längenaussage von Satz 4 läßt sich nicht in einer zu Formel (8) analogen Weise auf Moduln eines Ranges $>d$ ausdehnen. Wir demonstrieren dies an einem in [8], Bemerkung 1 angegebenen Beispiel: Es sei k ein Körper, $R: = k[[x,y]]$ mit der Relation $x^2 = y^3$, $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal von R, $E: = R^2/R\langle x,y\rangle$ und $M: = E\oplus E$.

Es ist $l(R/\mathfrak{J}_2(M)) = 3$ und $l(tM) = 2$. Wegen $\overset{2}{\wedge}M \cong$ $\cong \overset{2}{\wedge}E \oplus (E\otimes_R E) \oplus \overset{2}{\wedge}E \cong R/\mathfrak{m} \oplus (E\otimes_R E) \oplus R/\mathfrak{m}$ gilt $l(t\overset{2}{\wedge}M) =$ $= 2 + l(t(E\otimes_R E))$. Zur Berechnung von $t(E\otimes_R E)$ stellen wir

$E\otimes_R E$ dar in der Form $R^4/Rb_1+\ldots+b_4$, wobei $b_1 = \langle x,0,y,0\rangle$, $b_2 = \langle 0,x,0,y\rangle$, $b_3 = \langle x,y,0,0\rangle$ und $b_4 = \langle 0,0,x,y\rangle$. Sind $e_1,\ldots,e_4$ die Elemente der kanonischen Basis von R^4, so hat man

$$(13)\qquad \begin{aligned} &x(e_3-e_2) = b_4-b_2,\ y(e_3-e_2) = b_1-b_3,\\ &xy(e_4-ye_1) = -y^2b_1+xb_4,\ y^2(e_4-ye_1) = yb_2-xb_3. \end{aligned}$$

Folglich sind die Restklassen c_1,c_2 von e_3-e_2 bzw. e_4-ye_1 Elemente von $t(E\otimes_R E)$. Andererseits hat man

$$E\otimes_R E/Rc_1+Rc_2 \cong R^2/R\langle x,y\rangle+R\langle y^2,x\rangle.$$

Der letzte Modul ist torsionsfrei, folglich ist $t(E\otimes_R E) = Rc_1+Rc_2$. Wegen (13) wird $t(E\otimes_R E)$ als k-Vektorraum von c_1,c_2,xc_2,yc_2 erzeugt. Da diese Elemente über k linear unabhängig sind, gilt $l(t(E\otimes_R E)) = 4$, $l(t\overset{2}{\wedge}M) = 6$.

3. Differentielle Anwendungen

Zu den Begriffen und Bezeichnungen in diesem Abschnitt vgl. [7]; dort findet man auch, zumindest für den analytischen Fall, die in den Beweisen herangezogenen Sätze. Wir verallgemeinern zunächst Korollar 2 aus [8].

SATZ 5. *Es sei k ein Körper, A eine rein d-dimensionale reduzierte affine oder analytische k-Algebra. Alle Primideale von A seien separabel, die Lokalisierungen nach maximalen Idealen seien vollständige Durchschnitte und die Lokalisierungen nach nicht maximalen Primidealen regulär. Dann sind $t\overset{d}{\wedge}D_k(A)$ und $A/\mathfrak{F}_d(D_k(A))$ äquivalente A-Moduln.*

Beweis. Die Voraussetzungen garantieren, daß $D_k(A)$ den Rang d und eine homologische Dimension ≤ 1 hat. Sie implizieren ferner, daß $D_k(A)_{\mathfrak{p}}$ frei ist für alle nicht maximalen Primideale $\mathfrak{p}$ von R. Es ist also grad$\mathfrak{A}_d(D_k(A)) \geq d$. Man kann jetzt Satz 4 anwenden.

ANMERKUNGEN.

3. Es sei k ein Körper der Charakteristik O, A eine analytische k-Algebra, $\mathfrak{p}$ ein Primideal in A, $f_1,\dots,f_s$ ein Bezugssystem für $\mathfrak{p}$ in A und K der Quotientenkörper von $k\langle\langle f_1,\dots,f_s\rangle\rangle$ in $A_{\mathfrak{p}}$. Der universell-endliche K-Differentialmodul $D_K(A_{\mathfrak{p}})$ existiert, und es ist $D_K(A_{\mathfrak{p}}) \cong D_k(A_{\mathfrak{p}})/$ $/A_{\mathfrak{p}}(df_1\otimes 1)+\dots+A_{\mathfrak{p}}(df_s\otimes 1)$, wobei d die universell-endliche k-Derivation von A bezeichnet. Mit diesen Voraussetzungen und Bezeichnungen gilt: Ist $\mathfrak{p}$ ein minimales Primideal des singulären Ortes von A und $A_{\mathfrak{p}}$ ein reduzierter vollständiger Durchschnitt der Dimension d, dann ist $l(t^d\wedge D_K(A_{\mathfrak{p}})) =$ $= l(A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{A}_d(D_K(A_{\mathfrak{p}})))$. Zum Beweis benutzt man die in [7], § 8 bewiesenen Sätze über universell-endliche Derivationen noetherscher K-Algebren.

4. Ist R ein noetherscher Ring, $n > \dim R$, $b \in R^n$, $M: = R^n/Rb$ und $r: = \mathrm{grad}\,\mathfrak{A}_{n-1}(M) \geq 1$, dann gilt für alle Primideale $\mathfrak{p}$ von R mit codim $\mathfrak{p} \leq r$

$$\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i l(t^{(n-1)-i}\wedge M_{\mathfrak{p}}) = l(R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{A}_{n-1}(M_{\mathfrak{p}})),$$

wie man sich mit Formel (8) aus Abschnitt 2 leicht überlegt. Hieraus erhält man unter den Voraussetzungen von Satz 5 und Anmerkung 3 allgemeinere Resultate für den Fall, daß die Lokalisierungen von A nach maximalen Idealen bzw. der Ring $A_{\mathfrak{p}}$ sogar Hyperflächenringe sind.

Literatur

[1] EAGON, J.A., NORTHCOTT, D.G.: Ideals defined by matrices and a certain complex associated with them. Proc. Roy. Soc. Ser.A 269, 188-204 (1962).

[2] EISENBUD, D., EVANS, E.G.jr.: Generating Modules Efficiently: Theorems from Algebraic K-Theory. J. Algebra 27, 278-305 (1973).

[3] GREUEL, G.-M.: Der Gauss-Manin-Zusammenhang isolierter Singularitäten von vollständigen Durchschnitten. Dissertation Göttingen (1973).

[4] LEBELT, K.: Über Torsion äußerer Potenzen von Moduln der homologischen Dimension 1. Dissertation Clausthal (1973).

[5] LEBELT, K.: Torsion äußerer Potenzen von Moduln der homologischen Dimension 1. Erscheint demnächst in Math. Ann.

[6] NORTHCOTT, D.G.: Lessons on Rings, Modules and Multiplicities. Cambridge: University Press 1968.

[7] SCHEJA, G., STORCH, U.: Differentielle Eigenschaften der Lokalisierungen analytischer Algebren. Math. Ann. 197, 137-170 (1972).

[8] STORCH, U.: Zur Längenberechnung von Moduln. Arch. Math. XXIV, 39-43 (1973).

Winfried Bruns

Udo Vetter

Institut für Mathematik
der Technischen Universität

D-3392 Clausthal-Zellerfeld

Erzstr. 1

(Eingegangen am 27. September 1974)