Eine Charakterisierung der $(\mathrm{R}_k, \mathrm{S}_{k+1})$-Ringe

Von

WINFRIED BRUNS *)

Der Ausgangspunkt unserer Überlegungen ist das folgende Theorem von Bourbaki ([1], p. 76, Théorème 6): *R sei ein normaler noetherscher Integritätsbereich; dann besitzt jeder endlich erzeugte torsionsfreie R-Modul M einen freien Untermodul L, für den M/L isomorph zu einem Ideal ist.* Dieses Theorem verallgemeinert die klassischen Struktursätze für torsionsfreie Moduln über Hauptideal- und Dedekindbereichen. In [4], Theorem 2.7 hat E. G. Evans, Jr. gezeigt, daß die genannte Eigenschaft die normalen unter den noetherschen Integritätsbereichen charakterisiert.

Wir bezeichnen einen kommutativen noetherschen Ring R als $(\mathrm{R}_k, \mathrm{S}_{k+1})$-*Ring*, wenn er die Serreschen Bedingungen (R_k) und (S_{k+1}) erfüllt (zu deren Definition vgl. man [6], p. 107, (5.8.2) und p. 103, (5.7.2)). R ist genau dann normal (reduziert), wenn R ein $(\mathrm{R}_1, \mathrm{S}_2)$-Ring ($(\mathrm{R}_0, \mathrm{S}_1)$-Ring) ist ([6], p. 108, (5.8.5), (5.8.6)). In [2], Korollar 2 zu Satz 2, haben wir das Theorem von Bourbaki verallgemeinert: *R sei ein $(\mathrm{R}_k, \mathrm{S}_{k+1})$-Ring; dann besitzt jeder k-te Syzygienmodul M mit Rang einen freien Untermodul L, für den M/L ebenfalls k-ter Syzygienmodul ist und einen Rang $\leqq k$ hat.* Ein endlich erzeugter R-Modul M wird k-ter *Syzygienmodul* genannt, wenn eine exakte Sequenz

$$0 \to M \to F_k \to \cdots \to F_1$$

mit endlich erzeugten freien R-Moduln F_i existiert. Es liegt nahe, die Evanssche Charakterisierung der (nullteilerfreien) $(\mathrm{R}_1, \mathrm{S}_2)$-Ringe auf beliebiges k zu verallgemeinern. Dies ist auch deshalb von Interesse, weil vergleichbare Charakterisierungen für k-Gorensteinringe existieren ([5]).

Wir verstehen den Begriff „Rang" so, wie er in [8], § 6 definiert wurde. Wenn man eine generelle Voraussetzung wie „nullteilerfrei" oder wenigstens „reduziert" vermeiden will, muß man mit einer allgemeiner anwendbaren Invariante endlich erzeugter R-Moduln M arbeiten. Für ein Primideal $\mathfrak{p}$ in R bezeichne $\mu(\mathfrak{p}, M)$ die Minimalerzeugendenzahl des $R_{\mathfrak{p}}$-Moduls $M_{\mathfrak{p}}$. Dann setzen wir

$$\nu(M) := \min\{\mu(\mathfrak{p}, M) : \mathfrak{p} \text{ Primideal in } R\}.$$

Offensichtlich genügt es, bei der Berechnung von $\nu(M)$ die minimalen Primideale von

*) Die Ergebnisse dieser Note sind enthalten in der vom Verfasser als Habilitationsschrift eingereichten Arbeit „Basische Elemente in Moduln über noetherschen Ringen".

R heranzuziehen. Zwei weitere Bezeichnungen: $\mathrm{t}(\mathfrak{p}, M)$ benennt die Länge einer maximalen in $\mathfrak{p} R_{\mathfrak{p}}$ enthaltenen $M_{\mathfrak{p}}$-Sequenz, $\mathrm{ht}(\mathfrak{p})$ die *Höhe* eines Primideals; $\mathrm{t}(\mathfrak{p}, R)$ kürzen wir durch $\mathrm{t}(\mathfrak{p})$ ab. Die Zahl $\mathrm{t}(\mathfrak{p}, M)$ wird häufig als *Tiefe* oder *homologische Kodimension* von $M_{\mathfrak{p}}$ bezeichnet. $(\mathrm{R_k}, \mathrm{S_{k+1}})$-Ringe lassen sich dann so beschreiben: Für alle Primideale $\mathfrak{p}$ mit $\mathrm{t}(\mathfrak{p}) \leqq k$ ist $R_{\mathfrak{p}}$ ein regulärer lokaler Ring. Man zeigt leicht, daß für einen k-ten Syzygienmodul M gilt: $\mathrm{t}(\mathfrak{p}, M) \geqq \min\{k, \mathrm{t}(\mathfrak{p})\}$ für alle Primideale $\mathfrak{p}$ von R.

Satz. *R sei ein kommutativer noetherscher Ring. Dann sind folgende Aussagen über R äquivalent:*

(1) *R ist ein $(\mathrm{R_k}, \mathrm{S_{k+1}})$-Ring.*

(2) *Jeder k-te Syzygienmodul M besitzt einen freien Untermodul L, für den M/L ebenfalls k-ter Syzygienmodul und $\nu(M/L) \leqq k$ ist.*

Wir beginnen mit dem Beweis *der Implikation* (1) $\Rightarrow$ (2), den wir im wesentlichen aus [2], Beweis zu Satz 2 übernehmen. (Es spielt keine Rolle, daß in [2] mit dem Begriff „k-torsionslos" gearbeitet wurde, denn bereits über $(k-2)$-Gorensteinringen ist ein Modul genau dann k-ter Syzygienmodul, wenn er k-torsionslos ist; vgl. [5].) Dort wurde gezeigt, daß es genügt, im Fall $\nu(M) \geqq k+1$ ein Element $x \in M$ mit folgender Eigenschaft zu finden: x läßt sich für alle Primideale $\mathfrak{p}$ von R mit $\mathrm{t}(\mathfrak{p}) \leqq k$ in ein minimales Erzeugendensystem des $R_{\mathfrak{p}}$-Moduls $M_{\mathfrak{p}}$ aufnehmen. Bei $\nu(M) \geqq k+1$ hat man $\mu(\mathfrak{p}, M) \geqq k+1$ für alle Primideale $\mathfrak{p}$ von R. Da bei $(\mathrm{S_{k+1}})$-Ringen $\mathrm{t}(\mathfrak{p}) \leqq k$ äquivalent zu $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \leqq k$ ist, finden wir ein geeignetes Element $x \in M$ mit Hilfe von Theorem A aus [3] in Verbindung mit der sich daran anschließenden Bemerkung.

Dieses Verfahren läuft darauf hinaus, Elemente $x_1, \ldots, x_s$, $s = \nu(M) - k$, in M zu finden, die für alle Primideale $\mathfrak{p}$ mit $\mathrm{t}(\mathfrak{p}) \leqq k$ einen freien direkten Summanden des Ranges s von $M_{\mathfrak{p}}$ erzeugen. Das folgende einfache Lemma zeigt, daß dies, jedenfalls in $(k+1)$-ten Syzygienmoduln, auch die einzige Möglichkeit ist, L zu konstruieren.

Lemma 1. *R sei ein noetherscher lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$ und*

$$0 \to M \to F \to N \to 0$$

eine exakte Sequenz endlich erzeugter R-Moduln, bei der F frei und $\mathrm{t}(\mathfrak{m}, N) \geqq \mathrm{t}(\mathfrak{m})$ ist. L sei ein freier Untermodul von M mit $\mathrm{t}(\mathfrak{m}, M/L) \geqq \mathrm{t}(\mathfrak{m})$. Dann ist L freier direkter Summand von (M und) F.

Beweis. Zusammen mit der Voraussetzung über N und M/L impliziert die exakte Sequenz

$$0 \to M/L \to F/L \to N \to 0$$

die Ungleichung $\mathrm{t}(\mathfrak{m}, F/L) \geqq \mathrm{t}(\mathfrak{m})$. Da F/L projektive Dimension $\leqq 1$ besitzt, muß nach der Formel von Auslander und Buchsbaum ([7], Theorem 173) F/L ein freier R-Modul sein. Dies ist dann und nur dann der Fall, wenn L freier direkter Summand von F ist. —

Wir benötigen ein zweites Lemma, das zeigt, wie ein freier direkter Summand einer direkten Summe $M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$ auf die Summanden M_i „verteilt" werden kann.

Lemma 2. *R sei ein lokaler (nicht notwendig noetherscher) Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$. Die R-Moduln $M_1, \ldots, M_n$ seien Untermoduln der endlich erzeugten freien R-Moduln F_1 bzw. ... bzw. F_n. L sei ein freier Untermodul von $M := M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$, der direkter Summand in $L := L_1 \oplus \cdots \oplus L_n$ ist. Dann existieren natürliche Zahlen $m_1, \ldots, m_n$ derart, daß $m_1 + \cdots + m_n \geqq \operatorname{rang}(L)$ ist und M_i einen freien direkten Summanden L_i des Ranges m_i von F_i enthält.*

Beweis. Es genügt, den Fall $n = 2$ zu behandeln; dann folgt die Behauptung für alle n durch Induktion. Sei also $n = 2$. Es gibt eine Projektion $\pi : F \to L$ mit $\pi(L) = L$, erst recht $\pi(M) = L$. Aus dem von $\pi(M_1)$ und $\pi(M_2)$ gebildeten Erzeugendensystem von L können wir (unter Benutzung des Lemmas von Nakayama) ein Erzeugendensystem $\pi(x_1), \ldots, \pi(x_s)$, $s = \operatorname{rang}(L)$, auswählen. Ein solches Erzeugendensystem ist (wiederum des Lemmas von Nakayama wegen) bereits eine Basis von L. Seien etwa $x_1, \ldots, x_r \in M_1$ und $x_{r+1}, \ldots, x_s \in M_2$. Dann erzeugen $x_1, \ldots, x_r$ und $x_{r+1}, \ldots, x_s$ die gesuchten freien direkten Summanden L_1 von F_1 bzw. L_2 von F_2. —

Nun zum eigentlichen Beweis *der Implikation* (2) $\Rightarrow$ (1)! Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal von R mit $\mathrm{t}(\mathfrak{p}) \leqq k$. Wir betrachten eine freie Auflösung

$$\cdots \to F_n \xrightarrow{f_n} F_{n-1} \to \cdots \to F_2 \xrightarrow{f_2} F_1 \xrightarrow{f_1} R$$

von $R/\mathfrak{p}$, also $R/\mathfrak{p} = \operatorname{Kokern} f_1$. Sei $N := \operatorname{Kern} f_k$ und $M := N^{k+1}$. Auch $(\operatorname{Kern} f_{k-1})^{k+1}$ ist k-ter Syzygienmodul, und man hat eine exakte Sequenz

$$0 \to M_{\mathfrak{p}} \to (F_k)_{\mathfrak{p}}^{k+1} \to (\operatorname{Kern} f_{k-1})_{\mathfrak{p}}^{k+1} \to 0\,.$$

Es gilt $\mathrm{t}(\mathfrak{p}, (\operatorname{Kern} f_{k-1})^{k+1}) \geqq \min\{k, \mathrm{t}(\mathfrak{p})\} \geqq \mathrm{t}(\mathfrak{p})$. Nach Voraussetzung besitzt M einen freien Untermodul L, für den M/L ebenfalls k-ter Syzygienmodul und $\nu(M/L) \leqq k$ ist. Auch für M/L gilt: $\mathrm{t}(\mathfrak{p}, M/L) \geqq \mathrm{t}(\mathfrak{p})$.

Lemma 1 zeigt: $L_{\mathfrak{p}}$ ist freier direkter Summand in $M_{\mathfrak{p}}$ und $(F_k)_{\mathfrak{p}}^{k+1}$. Nach Lemma 2 können wir $L_{\mathfrak{p}}$ auf die Summanden von $M_{\mathfrak{p}}$ und $(F_k)_{\mathfrak{p}}^{k+1}$ verteilen: es existieren ganze Zahlen m_i mit $\sum_{i=1}^{k+1} m_i \geqq \operatorname{rang}(L)$ derart, daß $N_{\mathfrak{p}}$ einen freien direkten Summanden L_i des Ranges m_i von $(F_k)_{\mathfrak{p}}$ enthält. Sei $u := \nu(N)$. Dann ist $\nu(M) = (k+1)\,u$ und mithin $\operatorname{rang}(L) \geqq (k+1)\,u - k > (k+1)(u-1)$. Also gilt $m_i \geqq u$ für wenigstens ein i. Insgesamt: $N_{\mathfrak{p}}$ enthält einen freien $R_{\mathfrak{p}}$-Untermodul L_0 mit $\operatorname{rang}(L_0) = u$, der direkter Summand in $(F_k)_{\mathfrak{p}}$ ist.

Wir wählen ein minimales Primideal $\mathfrak{q}$ von R mit $\mu(\mathfrak{q}, N) = u$. Wegen $\mathrm{t}(\mathfrak{q}) = 0$ folgt genau wie für $\mathfrak{p}$: $N_{\mathfrak{q}}$ besitzt einen freien direkten Summanden L_1 des Ranges u. Dies aber ist nur bei $N_{\mathfrak{q}} = L_1$ möglich. Im Falle $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$ gilt: $\mathfrak{p} R_{\mathfrak{p}}$ besitzt endliche projektive Dimension, und $R_{\mathfrak{p}}$ ist nach dem Kriterium von Auslander-Buchsbaum-Serre regulär.

Es bleibt der Fall $\mathfrak{p} \nsubseteq \mathfrak{q}$. Dann ist $(R/\mathfrak{p})_{\mathfrak{q}} = 0$ und die Sequenz

$$0 \to N_{\mathfrak{q}} \to (F_k)_{\mathfrak{q}} \to \cdots \to (F_1)_{\mathfrak{q}} \to R_{\mathfrak{q}} \to 0$$

spaltet auf: $u = (-1)^k + \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+k} \operatorname{rang}(F_i)$.

Alle diese Überlegungen wenden wir genauso auf $N' :=$ Kern f_{k+1} an, und können danach annehmen: $N'_{\mathfrak{p}}$ enthält einen $R_{\mathfrak{p}}$-freien direkten Summanden des Ranges u' von $(F_{k+1})_{\mathfrak{p}}$ mit

$$u' = \nu(N') = (-1)^{k+1} + \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+k+1} \operatorname{rang}(F_i) .$$

Damit hat man $u + u' = \operatorname{rang}(F_{k+1})$. Eine einfache Rechnung mit Minimalerzeugendenzahlen zeigt: $L_0 = N_{\mathfrak{p}}$. Auch in diesem Fall ist also $\mathfrak{p} R_{\mathfrak{p}}$ von endlicher projektiver Dimension.

Anmerkungen: (1) Es genügt, im Satz (und im Lemma 1) von L endliche projektive Dimension zu verlangen. Ohne eine vergleichbare Voraussetzung kommt man jedoch nicht aus.

(2) In die Aussage (2) des Satzes geht die Zahl k dreimal ein. Entscheidend ist „M/L k-ter Syzygienmodul". An den beiden anderen Stellen kann man k durch beliebige ganze Zahlen $\geqq k$ ersetzen (wobei natürlich die Schranke für $\nu(M/L)$ von M unabhängig sein muß).

(3) Indem man „k-ter Syzygienmodul" durch verwandte Eigenschaften ersetzt, kann man die Aussage (2) des Satzes variieren. Wesentliche neue Gesichtspunkte ergeben sich dabei nicht.

(4) Aus Lemma 1 folgt: Ist M k-ter Syzygienmodul für jedes $k \leqq \sup\{\mathrm{t}(\mathfrak{m}) : \mathfrak{m}$ maximales Ideal von $R\}$ und L ein freier Untermodul von M derart, daß auch M/L k-ter Syzygienmodul für alle diese Zahlen k ist, dann ist L bereits freier direkter Summand von M.

Literaturverzeichnis

[1] N. Bourbaki, Algèbre commutative, Ch. VII: Diviseurs. Paris 1965.

[2] W. Bruns, „Jede" endliche freie Auflösung ist freie Auflösung eines von drei Elementen erzeugten Ideals. J. Algebra **39**, 429—439 (1976).

[3] D. Eisenbud and E. G. Evans, Jr., Generating modules efficiently: Theorems from algebraic K-theory. J. Algebra **27**, 278—305 (1973).

[4] E. G. Evans, Jr., Bourbaki's theorem and algebraic K-theory. J. Algebra **41**, 108—115 (1976).

[5] H.-B. Foxby, n-Gorenstein-rings. Proc. Amer. Math. Soc. **42**, 67—72 (1974).

[6] A. Grothendieck, Éléments de geométrie algébrique IV (seconde partie). Publ. math. I.H.E.S. **24** (1965).

[7] I. Kaplansky, Commutative rings (rev. ed.). Chicago and London 1974.

[8] G. Scheja und U. Storch, Differentielle Eigenschaften der Lokalisierungen analytischer Algebren. Math. Ann. **197**, 137—170 (1972).

Eingegangen am 18. 3. 1977

Anschrift des Autors:

Winfried Bruns
Institut für Mathematik
der Technischen Universität
Erzstraße 1
D-3392 Clausthal-Zellerfeld