DIE DIVISORENKLASSENGRUPPE DER RESTKLASSENRINGE VON POLYNOMRINGEN NACH DETERMINANTENIDEALEN

VON

WINFRIED BRUNS

Sei R ein kommutativer noetherscher Ring, r, s, t seien natürliche Zahlen, $0 < t < \min(r, s)$. R_{rst} bezeichne den Restklassenring des Polynomringes $R\,[\{X_j^i \mid 1 \leqslant i \leqslant r,\ 1 \leqslant j \leqslant s\}]$ nach dem von den $t+1$-reihigen Unterdeterminanten der $r \times s$-Matrix (X_j^i) erzeugten Ideal. Die Ringe R_{rst} sind grundlegend von M. Hochster und J. A. Eagon in [2] untersucht worden. Nach [2], Th. 1. Cor. 3 gilt : R_{rest} ist normal — d.h. nullteilerfrei und ganz-abgeschlossen — wenn R normal ist. Wir berechnen die Divisorenklassengruppen der Ringe R_{rst}.

Im folgenden ist $P(S)$ die Menge der Primideale der Höhe 1, $D(S)$ die Divisorengruppe, $F(S)$ die Gruppe der Hauptdivisoren und $Cl(S)$ die Divisorenklassengruppe eines Krullrings S. $\operatorname{div}(\mathfrak{a})$ bezeichnet den Divisor und $cl(\mathfrak{a})$ die Divisorenklasse eines gebrochnen Ideals $\mathfrak{a}$ von S. Für die Theorie der Divisorenklassengruppen verweisen wir auf [1].

SATZ : *Für alle kommutativen noetherschen normalen Ringe R und alle natürlichen Zahlen r, s, t mit $0 < t < \min\,(r, s)$ ist $Cl\,(R_{rst}) \cong Cl(R) \oplus \mathbb{Z}$.*

Beweis : Die zur Berechnung der $Cl(R_{rst})$ benutzte Methode verallgemeinert das in [1], §14 im Fall $r = s = 2$, $t = 1$ verwendete Verfahren. Der Abkürzung halber setzen wir $A := R_{rst}$.

Wichtig für das Rechnen mit den Unterdeterminanten der Matrix (X_j^i) ist die folgende Relation (∗). Wir bezeichnen mit $X_{j_1 \ldots j_u}^{i_1 \ldots i_u}$ die Determinante der durch die Zeilen $i_1, \ldots, i_u$ und die Spalten $j_1, \ldots, j_u$ definierte $u \times u$-Teilmatrix von (X_j^i) und ihre Restklasse in A mit $x_{j_1 \ldots j_u}^{i_1 \ldots i_u}$. Für alle $u_1, \ldots, u_m, i_2, \ldots, i_n \leqslant r$ und alle $v_2, \ldots, v_m, j_1, \ldots, j_n \leqslant s$ gilt :

$$(*) \qquad \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} X_{v_2 \ldots v_m}^{u_1 \ldots \hat{u}_k \ldots u_m} X_{j_1 \ldots j_n}^{u_k i_2 \ldots i_n} = \sum_{l=1}^{n} (-1)^{1+1} X_{j_l v_2 \ldots v_m}^{u_1 \ldots u_m} X_{j_1 \ldots \hat{j}_l \ldots j_n}^{i_2 \ldots i_n}.$$

($\wedge$ unter einem Index bedeutet, daß dieser Index auszulassen ist.) Man beweist (∗) durch Entwicklung der $X_{j_1 \ldots j_n}^{u_k i_2 \ldots u_n}$ nach der ersten Zeile und der $X_{j_l v_2 \ldots v_m}^{u_1 \ldots u_m}$ nach der ersten Spalte.

REV. ROUM. MATH. PURES ET APPL., TOME XX, No 10, P. 1109–1111, BUCAREST, 1975

Sei $\mathfrak{p}$ das von den $x^{1\ldots t}_{v_1\ldots v_t}$, $1 \leqslant v_1, \ldots, v_t \leqslant s$, $\mathfrak{q}$ das von den $x^{u_1\ldots u_t}_{1\ldots t}$, $1 \leqslant u_1, \ldots, u_t \leqslant r$, erzeugte Ideal von A. Nach [2], Th. 1 sind $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ Primideale der Höhe 1. Weiterhin setzen wir $d := x^{1\ldots t}_{1\ldots t}$, $q_{ij} := = d^{-1}x^{1\ldots \hat{i}\ldots tj}_{1\ \ldots\ t}$ für $1 \leqslant i \leqslant t < j \leqslant r$ und $B := R[\{x^i_j \mid 1 \leqslant i \leqslant t\} \cup \{q_{ij} \mid 1 \leqslant \leqslant i \leqslant t < j \leqslant r\}]$. Dann gilt:

(1) *Es ist* $A_\mathfrak{p} = A \cap B$.

Durch Entwicklung von $x^{1\ldots tj}_{1\ldots tk}$ nach der Spalte k ergibt sich für $j > t$ $x^j_k = \sum_{i=1}^{t} (-1)^{i+t} x^i_k\, q_{ij}$. Nach Definition von B ist damit $A \subset A_\mathfrak{p} \cap B$. Aus der Normalität von A folgt andererseits $A = \bigcap_{\mathfrak{r} \in P(A)} A_\mathfrak{r}$. Gemäß [3], Satz 7.2 gilt $Ad = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$, folglich $B \subset A_\mathfrak{r}$ für alle $\mathfrak{r} \in P(A) \setminus \{\mathfrak{p}, \mathfrak{q}\}$. Aber B ist auch in $A_\mathfrak{q}$ enthalten, denn (*) impliziert
$dx^{1\ldots \hat{i}\ldots tj}_{2\ \ldots\ t+1} = x^{1\ldots t}_{2\ldots t+1} x^{1\ldots \hat{i}\ldots tj}_{2\ \ldots\ t}$, mithin $q_{ij} \in A_\mathfrak{q}$.

(2) *B ist Polynomring über R, die Einbettung $R \to B$ induziert einen-Isomorphismus* $\varphi : Cl(R) \to Cl(B)$.

Nach Übergang zum Quotientenkörper von R können wir annehmen, R sei selbst ein Körper. Der Transzendenzgrad des Quotientenkörpers von B über R ist dann $\dim A = rt + st - t^2$ ([2], Th. 1). Das angegebene Erzeugendensystem von B ist also algebraisch unabhängig über R.

(3) *Es ist* $B = \bigcap_{\mathfrak{r} \in P(A)/\{\mathfrak{p}\}} A_\mathfrak{r}$.

Aus (2) folgt $A = A_\mathfrak{p} \cap \bigcap_{\mathfrak{n} \in P(B)} B_\mathfrak{n}$. Zum Beweis von (3) genügt es die Irredundanz dieser Darstellung von A zu beweisen, da unter den $B_\mathfrak{n}$, $\mathfrak{n} \in P(B)$, sämtliche $A_\mathfrak{r}$, $\mathfrak{r} \in P(A) \setminus \{\mathfrak{p}\}$ vorkommen und $A = \bigcap_{\mathfrak{r} \in P(A)} A_\mathfrak{r}$ ist. $A_\mathfrak{p} \supset \bigcap_{\mathfrak{n} \in P(B)} B_\mathfrak{n}$ ist sicherlich nicht möglich. Bd ist ein Primideal der Höhe 1 von B ([2], Th. 1), $d^{-1}x^{1\ldots t}_{2\ldots t+1}$ lieght nicht in B_{Bd}, da nicht in $A_\mathfrak{q}$, wohl aber in allen $B_\mathfrak{n}$, $\mathfrak{n} \neq Bd$, und auch in $A_\mathfrak{p}$. Zu jedem $\mathfrak{m} \in P(B) \setminus \{Bd\}$ existiert ein f mit $f \notin B_\mathfrak{m}$, jedoch $f \in B_\mathfrak{n}$ für $\mathfrak{n} \neq \mathfrak{m}$. Sollte $f \notin A_\mathfrak{p}$ sein, so multipliziert man f mit einer genügend hohen Potenz von d.

Nach (3) induziert die Einbettung $A \to B$ einen Homomorphismus $\psi : D(A) \to D(B)$, dessen Kern von $\operatorname{div}(\mathfrak{p})$ erzeugt wird, und ψ wiederum einen Homomorphismus $\varphi_1 : Cl(A) \to Cl(B)$ mit dem Kern $\mathbb{Z} \cdot cl(\mathfrak{p})$. Da die Einheiten von B auch Einheiten von A sind, ist $\psi \mid F(A) : F(A) \to F(B)$ bijektiv. $n \cdot \operatorname{div}(\mathfrak{p}) = \operatorname{div}(Af)$ impliziert $\psi(\operatorname{div}(Af)) = \operatorname{div}(Bf) = 0$, folglich $\operatorname{div}(Af) = 0$ und $n = 0$. Damit gilt:

(4) *$cl(p)$ ist kein Torsionselement und erzeugt den Kern von* $\varphi_1 : Cl(A) \to Cl(B)$.

Es gibt also eine exakte Sequenz $0 \to \mathbb{Z} \to Cl(A) \xrightarrow{\varphi_1} C1(B) \to 0$. Wegen (2) genügt es zu zeigen, daß φ_1 einen Schnitt besitzt. Sei $\mathfrak{r} \in P(A)$ und $\mathfrak{r} \cap R \neq \{0\}$. Dann ist sicherlich $\mathfrak{r} \neq \mathfrak{p}$. Gemäß (3) existiert (genau) ein Primideal $\mathfrak{m} \in P(B)$ mit $\mathfrak{m} \cap A = \mathfrak{r}$. Da B flach über R ist, hat $\mathfrak{r} \cap R = \mathfrak{m} \cap R$ die Höhe 1. Die Einbettung $R \to A$ induziert also einen Homomorphismus φ_2: $Cl(R) \to Cl(A)$. $\varphi_2 \circ \varphi^{-1}$ ist der gesuchte Schnitt φ_1, denn es gilt $\varphi_1 \circ \varphi_2 = \varphi$. (Unter Zuhilfenahme der Erweiterung $A \to (R \setminus \{0\})^{-1}$ A läßt sich zeigen, daß für alle $\mathfrak{r} \in P(A)$ mit $\mathfrak{r} \cap R \neq \{0\}$ $\varphi_2(cl(\mathfrak{r} \cap R)) = cl(\mathfrak{r})$ gilt).

Eingegangen am 28. Juni 1974

Universität Clausthal BRD

LITERATUR:

1. FOSSUM R. M., *The divisor class group of a Krull domain.* Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag, 1973.
2. HOCHTER, M., EAGON J. A., *Cohen-Macaulay rings, invariant theory, and the generic perfection of determinantal loci*, American J. Math., 1971, **93,** 1020–1058.
3. JÄHNER U. *Beispiele starrer analytischer Algebren.* Dissertation. Clausthal, 1974.